

**INTRODUCCION :**

Generalmente, una renta, se entiende simplemente, como un conjunto de capitales financieros, finito ó infinito numerable :

$$\{ (C_1, t_1), (C_2, t_2), \dots, (C_j, t_j), \dots, (C_n, t_n) \}, n \in \mathbb{N}. (1)$$

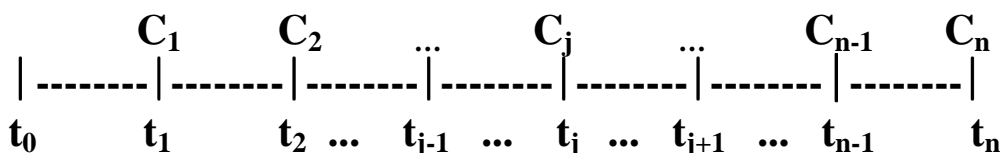
Sin embargo, en Matemática Financiera, a estos conjuntos se le exigen, una serie de propiedades, para poderlos considerar propiamente “rentas financieras”.

**PROPIEDADES :**

1).-La existencia de una sucesión de capitales financieros.

2).- La existencia de un intervalo  $I = [t_0, t_n]$ , particionado en subintervalos  $I_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ), todos del mismo “tamaño”, de modo que los vencimientos de los capitales financieros estén asociados a dichos intervalos.

\*Toda renta puede representarse en un esquema gráfico, horizonte económico, del tipo :



Siendo  $t_j \in I_j$ , el vencimiento del capital de cuantía  $C_j$ , (para todo  $j$ ,  $j=1,2,3,\dots$ )

**DENOMINACION Y ANOTACIONES DE LOS COMPONENTES DE UNA RENTA:**

- Término de la renta ó cuantía del capital financiero  $C_j$ , (para todo  $j$ ,  $j=1,2,3,\dots$ )
- Periodo de maduración: Cada uno de los subintervalos de tiempo  $I_j$ , (para todo  $j$ ,  $j=1,2,3,\dots$ )

- **Origen de la renta:** Extremo inferior del primer subintervalo  $I_1$ , anotación,  $t_0$  ó 0.
- **Final de la renta:** Extremo superior del intervalo  $I_n$ , anotación  $t_n$  ó  $n$
- **Duración:** Tiempo que media entre el origen y el final :  
$$(t_n - t_0) = n.$$

### ***”VALORACION DE RENTAS”***

El problema más importante, a tratar, en la teoría de rentas es su valoración, para ello, previamente hay que definir claramente sus componentes y elegir una ley financiera de valoración.

#### **DEFINICIONES :**

- Se denomina valor actual de una renta, a la suma financiera del valor de todos los capitales que la forman, referidos al momento inicial  $t_0$  y se anota, en principio,  $V_0$ .
- Se denomina valor final, si la valoración anterior, se realiza en  $t_n$ , es decir, en el momento final de la duración de la renta y se anota, en principio,  $V_n$ .

### ***“CLASIFICACION DE LAS RENTAS”***

Las rentas se pueden clasificar atendiendo a distintos criterios, según las características de los elementos que la definen :

#### **1).- Según la naturaleza de los términos que definen la renta :**

- a) **Rentas ciertas.** Todos los términos son ciertos
- b) **Rentas aleatorias.** Cuando alguno de los términos (cuantía y/o vencimiento), son aleatorios.

## 2).- Según la cuantía de los términos :

- a) Rentas constantes: Todas las cuantías de los términos son iguales entre sí  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$ .

**\*Para  $C = 1$  u.m, es, la renta unitaria.**

- b) Rentas variables: Cuando las cuantías de sus términos no son iguales, entre las más destacables :

- La cuantía de los términos varía en progresión geométrica :

$$C_j = q \times C_{j-1}, \text{ para todo } j, j = 1, 2, 3, \dots$$

- La cuantía de los términos varía en progresión aritmética :

$$C_j = p + C_{j-1} \text{ para todo } j, j = 1, 2, 3, \dots$$

**\*Siendo  $q$  y  $p$  las razones de la progresión geométrica y aritmética respectivamente.**

## 3).- Según el vencimiento de los términos:

- a) Prepagables, los vencimientos de todos los términos, tienen lugar en el extremo inferior, (inicio), del intervalo asociado.
- b) Pospagable, los vencimientos de todos los términos, coinciden con el extremo superior, (final), del intervalo asociado.

## 4).- Atendiendo al momento de su valoración :

- a) Rentas inmediatas,  $V_0$  se calcula en  $t_0$ , comienzo del primer intervalo  $I_1$ , y  $V_n$  en  $t_n$ , el final del último intervalo  $I_n$ .
- b) Rentas diferidas, cuando el punto de valoración del valor inicial,  $V_0$ , es anterior al comienzo del primer intervalo  $I_1$ , sin embargo,  $V_n$  se valora, en el final del último intervalo  $I_n$ .
- c) Rentas anticipadas. Cuando el punto de valoración del valor final,  $V_n$  es posterior al final del último intervalo  $I_n$ , sin embargo,  $V_0$  se valora, en el comienzo del primer intervalo  $I_1$ .

## 5.- En función de su duración:

- a) Rentas temporales. Las que tienen un número finito de términos.
- b) Rentas perpetuas. Su número de términos es infinito numerable y su duración, por lo tanto, ilimitada.

## 6.- Según la periodificación del vencimiento :

- a) Rentas anuales. Los términos vencen anualmente.
- b) Rentas fraccionadas. Los términos vencen con periodos ó intervalos de maduración, inferiores al año.  
**\*Ejemplo: renta mensual, bimensual, trimestral, cuatrimestral, semestral.**
- c) Rentas plurianuales. Los términos vencen con periodos ó intervalos de maduración superiores al año.  
**\*Ejemplo : renta bianual, trianual, cuatrienal, quinquenal, etc, etc.**

*“VALORACION DE LA RENTA, INMEDIATA, CONSTANTE, TEMPORAL Y POSPAGABLE DE N TERMINOS ANUALES “*

### Horizonte económico :

	a	a	...	a	...	a	a
T.A.E i	----	----	----	----	----	----	----
	0	1	2	...	j	...	n-1 n

- Valor inicial : Suma Financiera de todos los términos de la renta valorados en 0, con la ley financiera de capitalización compuesta, a un tipo de interés efectivo anual i :

$$\begin{aligned}
 A_{n|i} &= a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-j} + \dots + a(1+i)^{-n} = \\
 &= a [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-j} + \dots + (1+i)^{-n}] = \\
 &= a (1+i)^{-1} [(1 + (1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-j+1} + \dots + (1+i)^{-n+1})] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Sumando la progresión geométrica, que se encuentra entre los corchetes, de n términos, el primero,  $c_1=1$  y de razón  $q = (1+i)^{-1}$  :

$$S_{pg.} = c_1 [(1 - ((1+i)^{-1})^n) / (1 - (1+i)^{-1})] = [1 - (1+i)^{-n} / 1 - (1+i)^{-1}]$$

Sustituyendo este valor en (1) queda:

$$A_{n|i} = a (1+i)^{-1} [(1 - (1+i)^{-n}) / (1 - (1+i)^{-1})] = a [(1 - (1+i)^{-n}) / i]$$

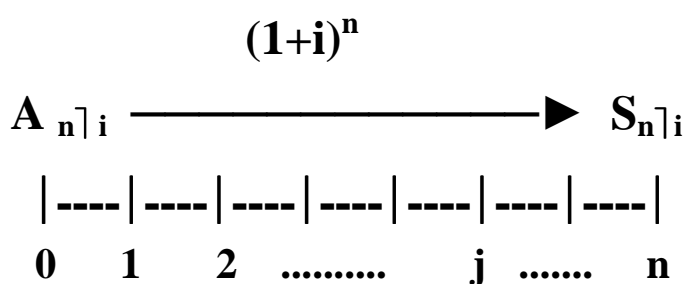
■ Expresión :  $A_{n|i} = a [(1 - (1+i)^{-n}) / i]$ .

■ Valor inicial renta unitaria, cuando,  $a = 1$ ,

$$a_{n|i} = [(1 - (1+i)^{-n}) / i]$$

■ Valor final : Se obtiene capitalizando el valor inicial  $A_{n|i}$ , desde 0, hasta  $n$ , es decir :  $S_{n|i} = A_{n|i} (1+i)^n$

Esquema gráfico :



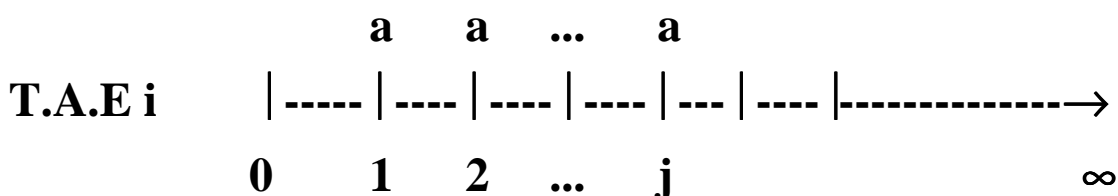
■ Expresión :  $S_{n|i} = a [(1+i)^n - 1] / i$

■ Valor final renta unitaria, siendo,  $a = 1$ :

$$S_{n|i} = [(1 - (1+i)^{-n}) / i] (1+i)^n = [(1+i)^n - 1] / i$$

“VALOR ACTUAL DE LA RENTA INMEDIATA, CONSTANTE,  
PERPETUA, ANUAL Y POSPAGABLE”

Horizonte económico :



- El valor inicial, es el paso al límite, cuando,  $n \rightarrow \infty$ , de  $A_{n|i}$ , es decir,  $A_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n|i}$

$n \rightarrow \infty$

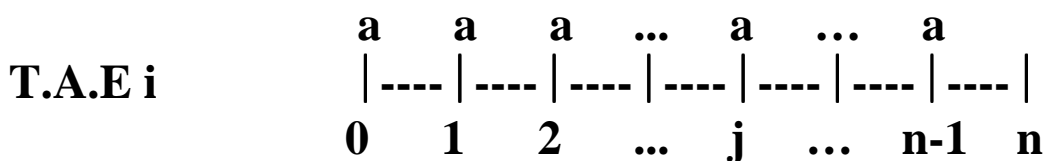
- Expresión valor inicial :  $A_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n|i} = a (1/i)$ .

$n \rightarrow \infty$

- Valor inicial renta unitaria,  $a = 1$  y  $a_{\infty|i} = 1/i$ .

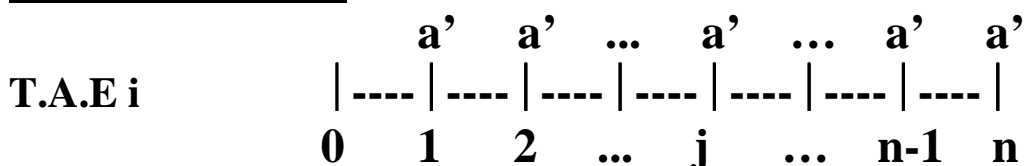
“VALORACION RENTA, INMEDIATA, CONSTANTE, TEMPORAL Y  
PREPAGABLE DE  $n$  TERMINOS ANUALES”

Horizonte económico:



- Valor inicial : La renta “prepagable” anterior, se puede transforma en una renta “pospagable” de término  $a' = a (1+i)$ , financieramente equivalente a la pospagable:

Horizonte económico:



■ **Expresión valor inicial:**

$$\ddot{A}_{n|i} = a(1+i) \left[ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] = (1+i) A_{n|i}$$

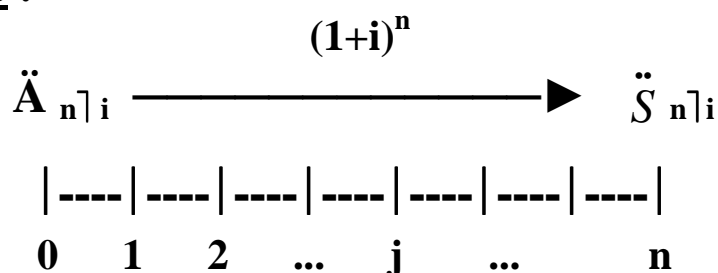
■ **Valor inicial renta unitaria,  $a=1$  y  $\ddot{a}_{n|i} = (1+i) a_{n|i}$**

■ **Valor final** : Se obtiene capitalizando el valor inicial,  $\ddot{A}_{n|i}$ , desde 0, hasta n :  $\ddot{S}_{n|i} = \ddot{A}_{n|i} (1+i)^n$

■ **Expresión valor final:**

$$\ddot{S}_{n|i} = a(1+i) \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = (1+i) S_{n|i}$$

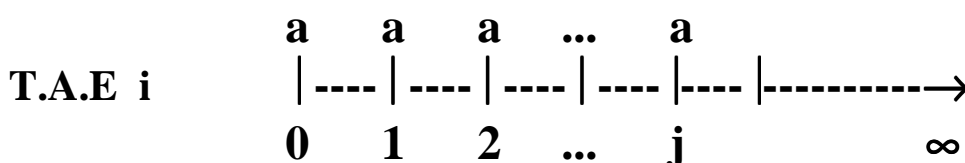
**Esquema gráfico :**



■ **Valor final renta unitaria ,  $a=1$  y  $\ddot{s}_{n|i} = (1+i) s_{n|i}$  .**

***“VALOR INICIAL, RENTA INMEDIATA, CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y PREPAGABLE”***

**Horizonte económico :**



■ Valor inicial :

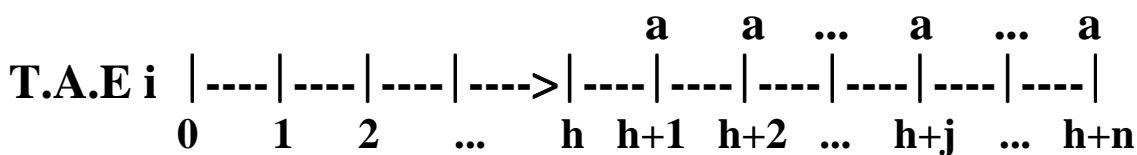
$$\ddot{A}_{\infty|i} = (1+i) A_{\infty|i} = a (1+i) (1/i) = a [1 + (1/i)]$$

■ Expresión valor inicial :  $\ddot{A}_{\infty|I} = a [1 + (1/i)]$

■ Valor inicial renta unitaria , a = 1 y  $\ddot{a}_{\infty|i} = 1 + (1/i)$

*“RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, TEMPORAL Y POSPAGABLE DE n TERMINOS ANUALES”*

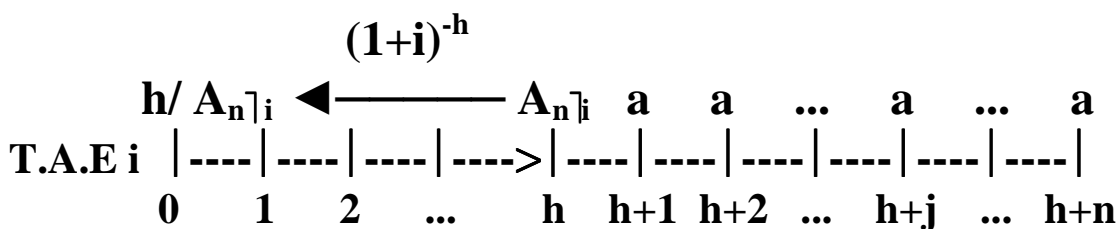
Horizonte económico :



■ Valor inicial:

1ª) Nos situamos en h y calculamos el valor inicial de la renta inmediata constante, temporal y pospagable de n términos anuales,  $A_{n|i}$ , este valor tiene vencimiento en h, con lo cual hay que actualizarlo hasta 0 multiplicándolo por  $(1+i)^{-h}$

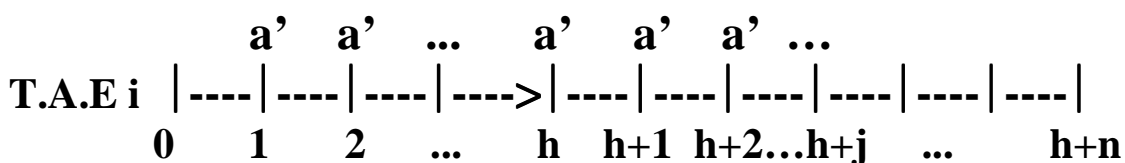
Esquema gráfico :





2ª) El valor inicial, es, el de la renta, resultante de transformar la renta diferida, que estamos estudiando, en la renta financieramente equivalente, inmediata, constante, temporal y pospagable, de  $n$  términos anuales  $a'$ , siendo,  $a' = a (1+i)^{-h}$ .

Horizonte económico:



**\*Observemos que la relación entre  $h$ , (diferimiento) y  $n$  (número de términos), puede ser cualquiera,  $n \leq h$  ó  $n > h$ .**

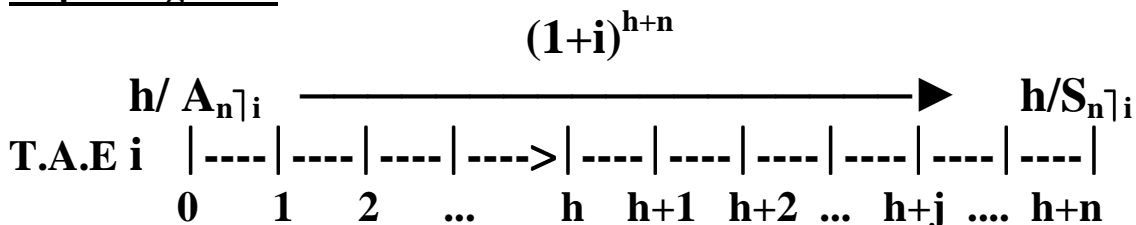
En ambos planteamientos, la expresión del valor inicial, evidentemente, tiene que ser la misma:

■ Expresión valor inicial:

$$h / A_{n|i} = (1+i)^{-h} A_{n|i} = (1+i)^{-h} a [ (1-(1+i)^{-n}) / i ]$$

■ Valor final : Se obtiene capitalizando el valor inicial,  $h / A_{n|i}$  , desde 0, hasta  $h+n$ :

Esquema gráfico :

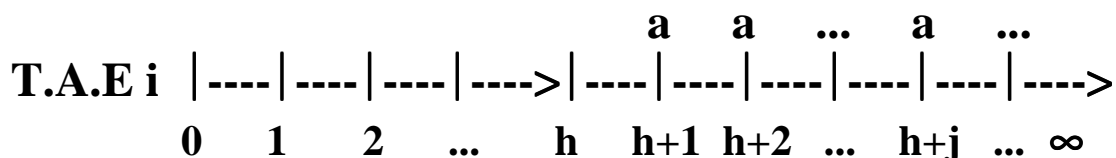


$$h / S_{n|i} = (1+i)^{h+n} ( h / A_{n|i} ) =$$

$$= (1+i)^{h+n} (1+i)^{-h} a [ 1 - (1+i)^{-n} / i ] = (1+i)^n a a_{n|i} = a s_{n|i}$$

**“RENTA DIFERIDA  $h$  PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y POSPAGABLE”**

**Horizonte económico :**

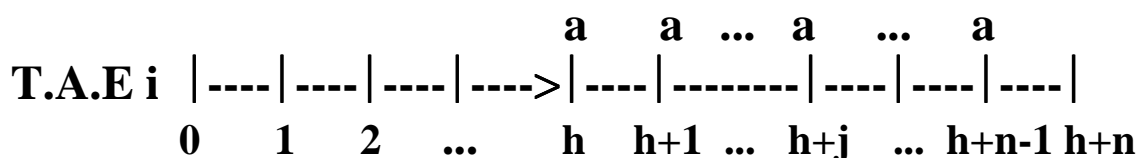


■ **Valor inicial :**

$$h / A_{\infty | i} = \lim_{n \rightarrow \infty} (h / A_n | i) = (1+i)^{-h} a (1/i) = (1+i)^{-h} A_{\infty | i}$$

**“RENTA DIFERIDA  $h$  PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, TEMPORAL Y PREPAGABLE DE  $n$  TERMINOS ANUALES”.**

**Horizonte económico :**



■ **Valor inicial :**

1ª) Nos situamos en  $h$  y calculamos el valor inicial de la renta inmediata constante, temporal y prepagable, de  $n$  términos anuales :  $\ddot{A}_n | i$ , este valor tiene vencimiento en  $h$ , con lo cuál hay que actualizarlo hasta 0 multiplicándolo por  $(1+i)^{-h}$ .

2ª) El valor inicial, es, el de la renta financieramente equivalente, inmediata constante temporal y prepagable de término,  $a' = a (1+i)^{-h}$

■ **Expresión valor inicial:**

$$h/ \ddot{A}_{n|i} = (1+i)^{-h} \ddot{A}_{n|i} = (1+i)^{-h} (1+i) a [ (1-(1+i)^{-n}) / i ] =$$

$$= (1+i)^{-h} (1+i) A_{n|i}$$

- **Valor final:** Lo obtenemos capitalizando el valor inicial,  $h/ \ddot{A}_{n|i}$ , desde 0, hasta  $h+n$ :

$$h/ \ddot{S}_{n|i} = (1+i)^{h+n} ( h/ \ddot{A}_{n|i} ) =$$

$$= (1+i)^{h+n} (1+i)^{-h} (1+i) a [1- (1+i)^{-n} / i] = (1+i)^n \ddot{A}_{n|i} = \ddot{S}_{n|i}$$

***“RENTA DIFERIDA  $h$  PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y PREPAGABLE”***

**Horizonte económico :**

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & & a & a & a & \dots & a & \dots \\ \text{T.A.E } i & | & \text{----} & | & \text{----} & | & \text{----} & | & \text{----} & > & | & \text{----} & | & \text{----} & | & \text{----} & | & \text{----} & > \\ & 0 & 1 & 2 & \dots & h & h+1 & h+2 & \dots & h+j & \dots & \infty \end{array}$$

■ **Valor inicial:**

$$h/ \ddot{A}_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} ( h / \ddot{A}_{n|i} ) = (1+i)^{-h} (1+i) a (1/i) =$$

$$= (1+i)^{-h} \ddot{A}_{\infty|i} = (1+i)^{-h} a (1 + (1/i))$$