

Dpto. Economía Financiera y Contabilidad**“Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización”****TEMA 6 y 7****Prof. María Jesús Hernández García,**<http://www.webpages.ull.es/users/mjhernan/>**“TEORIA DE RENTAS”****INTRODUCCION :**

Generalmente, una renta, se entiende simplemente, como un conjunto de capitales financieros, finito ó infinito numerable :

$$\{ (C_1, t_1), (C_2, t_2), \dots, (C_j, t_j), \dots, (C_n, t_n) \}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

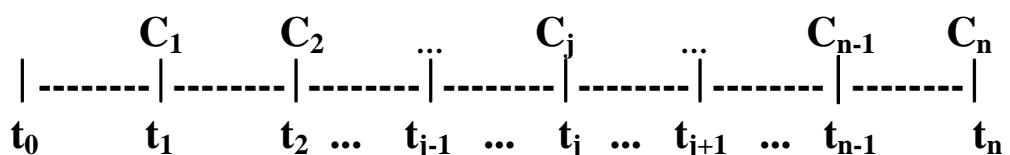
Sin embargo, en Matemática Financiera, a estos conjuntos se le exigen, una serie de propiedades, para poderlos considerar propiamente “rentas financieras”.

PROPIEDADES :

1).-La existencia de una sucesión de capitales financieros.

2).- La existencia de un intervalo $I = [t_0, t_n]$, particionado en subintervalos I_j ($j=1,2,\dots,n$), todos del mismo “tamaño”, de modo que los vencimientos de los capitales financieros estén asociados a dichos intervalos.

*Toda renta puede representarse en un esquema gráfico, horizonte económico, del tipo :



Siendo $t_j \in I_j$, el vencimiento del capital de cuantía C_j , (para todo j , $j=1,2,3,\dots$)

DENOMINACION Y ANOTACIONES DE LOS COMPONENTES DE UNA RENTA:

- Término de la renta ó cuantía del capital financiero C_j , (para todo j , $j=1,2,3,\dots$)
- Periodo de maduración: Cada uno de los subintervalos de tiempo I_j , (para todo j , $j=1,2,3,\dots$)

- **Origen de la renta:** Extremo inferior del primer subintervalo I_1 , anotación, t_0 ó 0.
- **Final de la renta:** Extremo superior del intervalo I_n , anotación t_n ó n
- **Duración:** Tiempo que media entre el origen y el final :
$$(t_n - t_0) = n.$$

”VALORACION DE RENTAS”

El problema más importante, a tratar, en la teoría de rentas es su valoración, para ello, previamente hay que definir claramente sus componentes y elegir una ley financiera de valoración.

DEFINICIONES :

- Se denomina valor actual de una renta, a la suma financiera del valor de todos los capitales que la forman, referidos al momento inicial t_0 y se anota, en principio, V_0 .
- Se denomina valor final, si la valoración anterior, se realiza en t_n , es decir, en el momento final de la duración de la renta y se anota, en principio, V_n .

”CLASIFICACION DE LAS RENTAS”

Las rentas se pueden clasificar atendiendo a distintos criterios, según las características de los elementos que la definen :

1).- Según la naturaleza de los términos que definen la renta :

- a) **Rentas ciertas.** Todos los términos son ciertos
- b) **Rentas aleatorias.** Cuando alguno de los términos (cuantía y/o vencimiento), son aleatorios.

2).- Según la cuantía de los términos :

a) Rentas constantes: Todas las cuantías de los términos son iguales

entre sí $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$.

*Para $C = 1$ u.m, es, la renta unitaria.

b) Rentas variables: Cuando las cuantías de sus términos no son iguales, entre las más destacables :

■ La cuantía de los términos varía en progresión geométrica :

$C_j = q \times C_{j-1}$, para todo j , $j = 1, 2, 3, \dots$

■ La cuantía de los términos varía en progresión aritmética :

$C_j = p + C_{j-1}$ para todo j , $j = 1, 2, 3, \dots$

*Siendo q y p las razones de la progresión geométrica y aritmética respectivamente.

3).- Según el vencimiento de los términos:

a) Prepagables, los vencimientos de todos los términos, tienen lugar en el extremo inferior, (inicio), del intervalo asociado.

b) Pospagable, los vencimientos de todos los términos, coinciden con el extremo superior, (final), del intervalo asociado.

4).- Atendiendo al momento de su valoración :

a) Rentas inmediatas, V_0 se calcula en t_0 , comienzo del primer intervalo I_1 , y V_n en t_n , el final del último intervalo I_n .

b) Rentas diferidas, cuando el punto de valoración del valor inicial, V_0' es anterior al comienzo del primer intervalo I_1 , sin embargo, V_n se valora, en el final del último intervalo I_n .

c) Rentas anticipadas. Cuando el punto de valoración del valor final, V_n es posterior al final del último intervalo I_n , sin embargo, V_0 se valora, en el comienzo del primer intervalo I_1 .

5.- En función de su duración:

a) Rentas temporales. Las que tienen un número finito de términos.

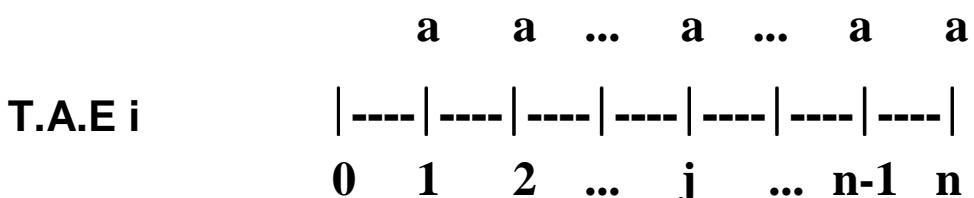
b) Rentas perpetuas. Su número de términos es infinito numerable y su duración, por lo tanto, ilimitada.

6.- Según la periodificación del vencimiento :

- a) **Rentas anuales.** Los términos vencen anualmente.
- b) **Rentas fraccionadas.** Los términos vencen con períodos ó intervalos de maduración, inferiores al año.
***Ejemplo: renta mensual, bimensual, trimestral, cuatrimestral, semestral.**
- c) **Rentas plurianuales.** Los términos vencen con períodos ó intervalos de maduración superiores al año.
***Ejemplo : renta bianual, trianual, cuatrienal, quinquenal, etc, etc.**

"VALORACION DE LA RENTA, INMEDIATA, CONSTANTE, TEMPORAL Y POSPAGABLE DE N TERMINOS ANUALES "

Horizonte económico :



- **Valor inicial :** Suma Financiera de todos los términos de la renta valorados en 0, con la ley financiera de capitalización compuesta, a un tipo de interés efectivo anual i :

$$\begin{aligned}
 A_{n|i} &= a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-j} + \dots + a(1+i)^{-n} = \\
 &= a [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-j} + \dots + (1+i)^{-n}] = \\
 &= a (1+i)^{-1} [(1 + (1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-j+1} + \dots + (1+i)^{-n+1})] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Sumando la progresión geométrica, que se encuentra entre los corchetes, de n términos, el primero, $c_1=1$ y de razón $q = (1+i)^{-1}$:

Dpto. Economía Financiera y Contabilidad
“Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización”
TEMA 6 y 7
Prof. María Jesús Hernández García,
<http://www.webpages.ull.es/users/mjhernan/>

$$S_{pg.} = c_1 [(1 - ((1+i)^{-1})^n / (1 - (1+i)^{-1})] = [1 - (1+i)^{-n} / 1 - (1+i)^{-1}]$$

Sustituyendo este valor en (1) queda:

$$A_{n \geq i} = a (1+i)^{-1} [(1 - (1+i)^{-n}) / (1 - (1+i)^{-1})] = a [(1 - (1+i)^{-n}) / i]$$

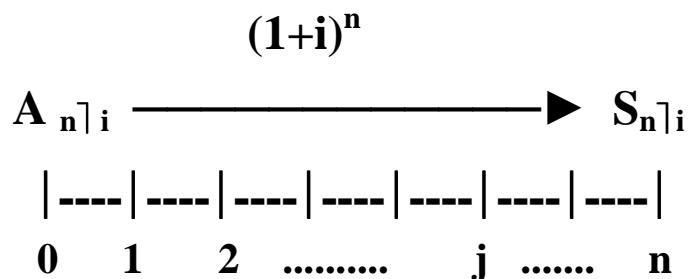
■ Expresión : $A_{n \geq i} = a [(1 - (1+i)^{-n}) / i]$.

■ Valor inicial renta unitaria, cuando, $a = 1$,

$$a_{n \geq i} = [(1 - (1+i)^{-n}) / i]$$

■ Valor final : Se obtiene capitalizando el valor inicial $A_{n \geq i}$, desde 0, hasta n , es decir : $S_{n \geq i} = A_{n \geq i} (1+i)^n$

Esquema gráfico :



■ Expresión : $S_{n \geq i} = a [(1 - (1+i)^{-n}) / i] (1+i)^n = [(1 - (1+i)^{-n}) / i] [(1+i)^n - 1] / i$

■ Valor final renta unitaria, siendo, $a = 1$:

$$S_{n \geq i} = [(1 - (1+i)^{-n}) / i] (1+i)^n = [(1 - (1+i)^{-n}) / i] [(1+i)^n - 1] / i$$

Dpto. Economía Financiera y Contabilidad
“Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización”

TEMA 6 y 7

Prof. María Jesús Hernández García,

<http://www.webpages.ull.es/users/mjhernan/>

“VALOR ACTUAL DE LA RENTA INMEDIATA, CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y POSPAGABLE”

Horizonte económico :

- El valor inicial, es el paso al límite, cuando, $n \rightarrow \infty$, de $A_{n \rightarrow i}$, es decir, $A_{\infty \rightarrow i} = \lim A_{n \rightarrow i}$

$$n \rightarrow \infty$$

- Expresión valor inicial : $A_{\infty}]_i = \lim A_n]_i = a$ (1/ i).

$$n \rightarrow \infty$$

- **Valor inicial renta unitaria, $a = 1$ y $a_{\infty}|_i = 1/i$.**

“VALORACION RENTA, INMEDIATA, CONSTANTE, TEMPORAL Y PREPAGABLE DE n TERMINOS ANUALES”

Horizonte económico:

T.A.E i

- Valor inicial : La renta “prepagable” anterior, se puede transforma en una renta “pospagable” de término $a' = a(1+i)$, financieramente equivalente a la pospagable:

Horizonte económico:

T.A.E i

a' a' ... a' ... a' a'
 | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- | ----- |
 0 1 2 ... j ... n-1 n

■ Expresión valor inicial:

$$\ddot{A}_{n|i} = a(1+i) [(1-(1+i)^{-n})/i] = (1+i) A_{n|i}$$

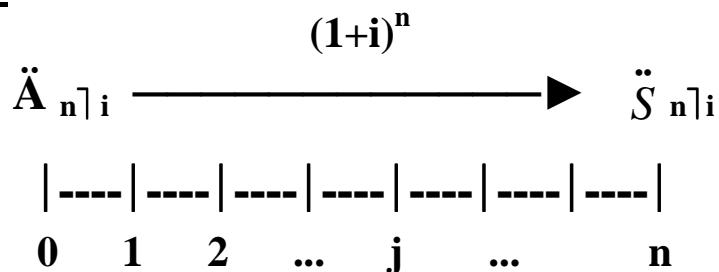
■ Valor inicial renta unitaria, $a=1$ y $\ddot{s}_{n|i} = (1+i) s_{n|i}$

■ Valor final : Se obtiene capitalizando el valor inicial, $\ddot{A}_{n|i}$, desde **0**, hasta **n** : $\ddot{s}_{n|i} = \ddot{A}_{n|i} (1+i)^n$

■ Expresión valor final:

$$\ddot{s}_{n|i} = a (1+i) [((1+i) - 1) / i] = (1+i) s_{n|i}$$

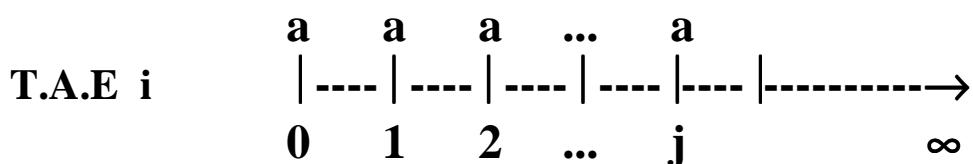
Esquema gráfico :



■ Valor final renta unitaria , $a=1$ y $\ddot{s}_{n|i} = (1+i) s_{n|i}$.

“VALOR INICIAL, RENTA INMEDIATA, CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y PREPAGABLE”

Horizonte económico :



■ Valor inicial:

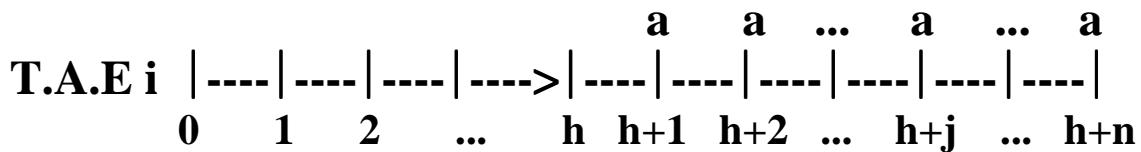
$$\ddot{A}_{\infty i} = (1+i) A_{\infty i} = a (1+i) (1/i) = a [1 + (1/i)]$$

■ Expresión valor inicial : $\ddot{A}_{\infty} I = a [1 + (1/i)]$

■ Valor inicial renta unitaria , $a = 1$ y $\ddot{a}_{\infty} = 1 + (1/i)$

“RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, TEMPORAL Y POSPAGABLE DE n TERMINOS ANUALES”

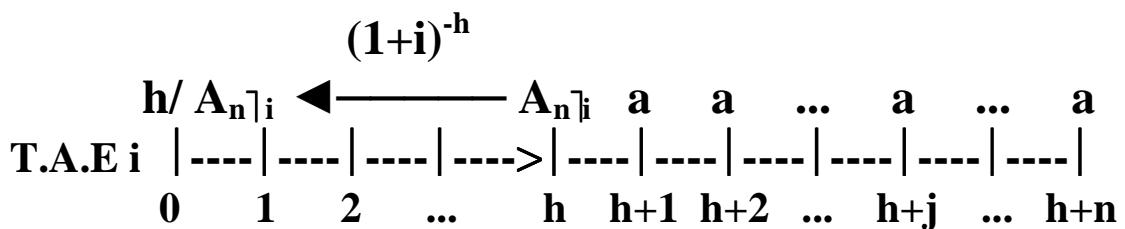
Horizonte económico :



■ Valor inicial:

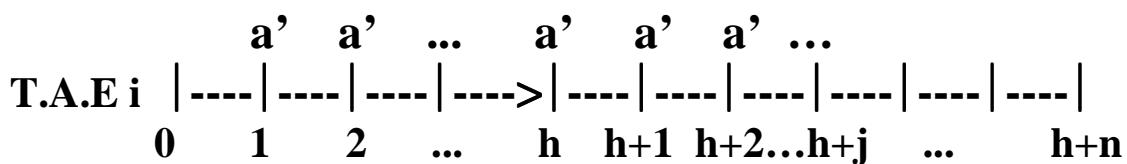
1º) Nos situamos en h y calculamos el valor inicial de la renta inmediata constante, temporal y pospagable de n términos anuales, $A_{n|_i}$, este valor tiene vencimiento en h , con lo cual hay que actualizarlo hasta 0 multiplicándolo por $(1+i)^{-h}$

Esquema gráfico :



2^{a)} El valor inicial, es, el de la renta, resultante de transformar la renta diferida, que estamos estudiando, en la renta financieramente equivalente, inmediata, constante, temporal y pospagable, de n términos anuales a' , siendo, $a' = a (1+i)^{-h}$.

Horizonte económico:



*Observemos que la relación entre h , (diferimiento) y n (número de términos), puede ser cualquiera, $n \leq h$ ó $n > h$.

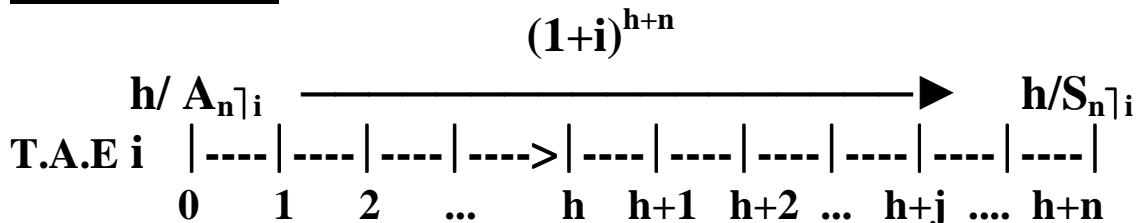
En ambos planteamientos, la expresión del valor inicial, evidentemente, tiene que ser la misma:

■ Expresión valor inicial:

$$h / A_{n|}i = (1+i)^{-h} A_{n|}i = (1+i)^{-h} a [(1-(1+i)^{-n})/i]$$

■ Valor final : Se obtiene capitalizando el valor inicial, $h / A_{n|}i$, desde 0, hasta $h+n$:

Esquema gráfico :



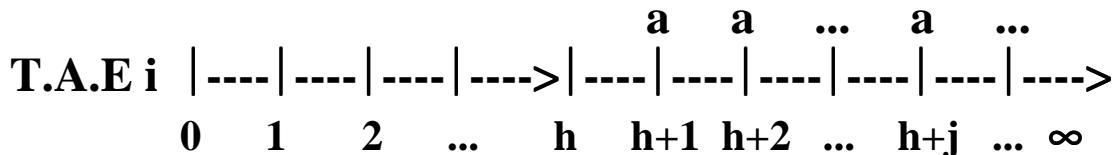
$$h / S_{n|}i = (1+i)^{h+n} (h / A_{n|}i) =$$

$$= (1+i)^{h+n} (1+i)^{-h} a [1 - (1+i)^{-n} / i] = (1+i)^n a a_{n|}i = a s_{n|}i$$

Dpto. Economía Financiera y Contabilidad
“Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización”
TEMA 6 y 7
Prof. María Jesús Hernández García,
<http://www.webpages.ull.es/users/mjhernan/>

“RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y POSPAGABLE”

Horizonte económico :

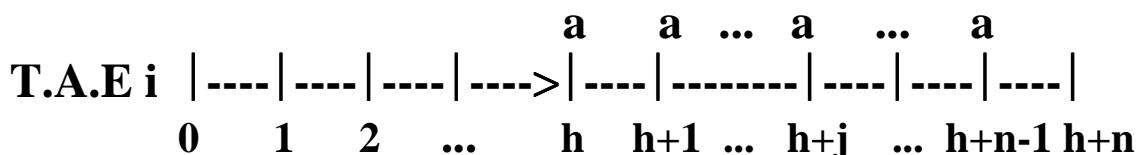


■ **Valor inicial :**

$$h / A_{\infty} \upharpoonright_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (h / A_n \upharpoonright_i) = (1+i)^{-h} a (1/i) = (1+i)^{-h} A_{\infty} \upharpoonright_i$$

“RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, CONSTANTE, TEMPORAL Y PREPAGABLE DE n TERMINOS ANUALES”.

Horizonte económico :



■ **Valor inicial :**

1^a) Nos situamos en h y calculamos el valor inicial de la renta inmediata constante, temporal y prepagable, de n términos anuales : $\bar{A}_n \upharpoonright_i$, este valor tiene vencimiento en h , con lo cual hay que actualizarlo hasta 0 multiplicándolo por $(1+i)^{-h}$.

2^a) El valor inicial, es, el de la renta financieramente equivalente, inmediata constante temporal y prepagable de término, $a' = a (1+i)^{-h}$

Dpto. Economía Financiera y Contabilidad

“Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización”

TEMA 6 y 7

Prof. María Jesús Hernández García,

<http://www.webpages.ull.es/users/mjhernan/>

■ Expresión valor inicial:

$$h/ \ddot{A}_{n|i} = (1+i)^{-h} \ddot{A}_{n|i} = (1+i)^{-h} (1+i) a [(1-(1+i)^{-n})/i] =$$

$$= (1+i)^{-h} (1+i) A_{n|i}$$

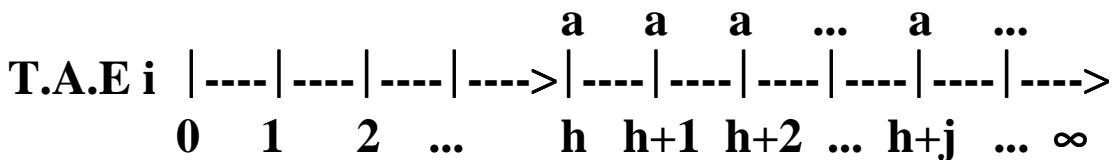
■ Valor final: Lo obtenemos capitalizando el valor inicial, $h/ \ddot{A}_{n|i}$, desde 0, hasta $h+n$:

$$h/ \ddot{S}_{n|i} = (1+i)^{h+n} (h/ \ddot{A}_{n|i}) =$$

$$= (1+i)^{h+n} (1+i)^{-h} (1+i) a [1 - (1+i)^{-n} / i] = (1+i)^n \ddot{A}_{n|i} = \ddot{S}_{n|i}$$

**“RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES,
CONSTANTE, PERPETUA, ANUAL Y PREPAGABLE”**

Horizonte económico :



■ Valor inicial:

$$h/ \ddot{A}_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} (h/ \ddot{A}_{n|i}) = (1+i)^{-h} (1+i) a (1/i) =$$

$$= (1+i)^{-h} \ddot{A}_{\infty|i} = (1+i)^{-h} a (1 + (1/i))$$