Dpto. Economía Financiera y Contabilidad
"Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización"
TEMAS 4 y 5.
Prof. María Jesús Hernández García.

"LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACION COMPUESTA"

INTRODUCCION **:**

Para deducir la expresión ó función matemática que exprese la ley financiera de capitalización compuesta, planteamos que transcurrido el periodo, establecido de capitalización ó maduración, los intereses de ese periodo, se añadirán al capital al final del periodo, para a su vez, producir intereses en el periodo siguiente, es decir los intereses, "se acumulan".

Para el modelo, establecemos este periodo de capitalización ó maduración anual y planteamos la operación financiera :
Se deposita un capital C_o , en el origen 0, a un tanto anual unitario *i*, durante n años, y deseamos calcular el valor final C_n , periodo a periodo, veremos los sucesivos montantes, C_1 , C_2 ,…, C_j ,…,C_n, del capital C_o:

- **Al final del primer año ó periodo 1:**

$C_1 = C_o + C_o\, i = C_o\,(1 + i).$

- **Al final del segundo año ó periodo 2:**

$C_2 = C_1 + C_1\, i = C_1\,(1 + i).$

- **Al final del tercer año ó periodo 3:**

$C_3 = C_2 + C_2\, i = C_2\,(1 + i).$

…………………………………………………………

- **Al final del j-ésimo año ó periodo j:**

$C_j = C_{j-1} + C_{j-1}\, i = C_{j-1}\,(1 + i).$

……………………………………………………………

- **Al final del n-ésimo año ó periodo n:**

$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_{n-1}\,(1 + i).$

La expresión matemática, del capital final ó montante C_n , en capitalización compuesta :

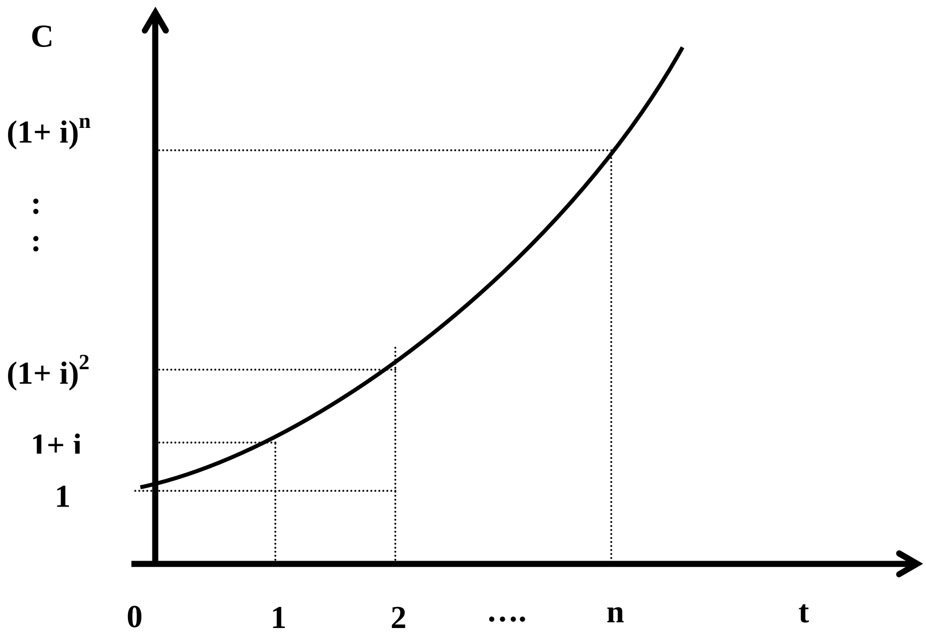
$$C_n = C_o\,(1+i)^n$$

En este caso los intereses de la operación financiera anterior ó intereses compuestos:

$$I_n = C_n - C_o \rightarrow I_n = C_o\,(1+i)^n - C_o = C_o\,[\,(1+i)^n - 1].$$

REPRESENTACION GRAFICA :

Puesto que, la expresión de la ley de capitalización compuesta es una función convexa y creciente, $C_o > 0$, $(1+ i) > 1$ y para $n = 0 \rightarrow (1+ i)^0 = 1$.



***En esta ocasión, se ha construido, la gráfica, con el capital unitario, $C_o = 1$ u.m.**

"CAPITALIZACION COMPUESTA EN TIEMPO FRACCIONADO: TANTOS EQUIVALENTES"

INTRODUCCION:

La capitalización, no siempre se efectúa con frecuencia anual, siendo lo habitual, que se capitalice, varias veces a lo largo del año, este proceso, se denomina, capitalización fraccionada, es decir que al final de cada fracción k-ésimal de año, (meses, bimestres, trimestres, cuatrimestres, semestres), se devengan intereses, que se incorporan al principal, para producir a su vez, nuevos intereses.

Una operación que dura n años, pero con capitalización fraccionada y se pacta, con el tanto de interés efectivo, correspondiente al

fraccionamiento, lo denominaremos $i_{k,}$, el capital final ó montante, anotado C_{nxk} , entonces :

$$C_{nxk} = C_o \ (1 + i_k)^{nxk}$$

El problema es que normalmente, aunque la operación se haya pactado en capitalización fraccionada, suele acordarse a un tanto anual efectivo ó TAE, anotado i. Por lo que, el tanto fraccionado, i_k , equivalente al anual, i, para que el montante fuese equivalente al final de una operación de duración 1 año, sería:

$$C_1 = C_o \ (1 + i) = C_o \ (1 + i_k)^{1 \cdot k} \quad (1)$$

Despejando de la igualdad (1), se obtienen las siguientes equivalencias:

- **El tanto fraccionado i_k ó efectivo k-ésimal, equivalente al tanto anual efectivo i ó TAE :**

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1 \quad (1)$$

- **El tanto efectivo anual i ó TAE, equivalente al tanto efectivo k-ésimal i_k :**

$$i = (1 + i_k)^k - 1 \quad (2).$$

"TANTOS NOMINALES"

DEFINICION:

- **El tanto nominal anual, k convertible, es simplemente la forma de LLAMAR al producto de k por el tanto efectivo i_k de la operación.**

***La anotación utilizada, para el tanto nominal, es, habitualmente, j_k , siendo :**

$$j_k = k \ i_k. \quad (3)$$

**** Este tanto nominal anual de frecuencia k, k convertible ó k capitalizable, es el que, se suele proporcionar, como dato, en lugar del TAE, si la capitalización de una operación financiera es k-fraccionada.**

"OPERATIVA EN OPERACIONES CAPITALIZACION COMPUESTA FRACCIONADA "

1.-	**Si el dato es el tanto anual efectivo ó T.A.E i, se utiliza la relación (1), para obtener i_k** $i_k = (1+i)^{1/k} - 1 \quad \Rightarrow \quad j_k = k\, i_k$
2.-	**Si el dato es el tanto nominal anual j_k, se utiliza la relación (3) para obtener i_k, pudiendo calcular luego el T.A.E con (2).** $i_k = j_k \;/\; k \quad \Rightarrow \quad i = (1 + i_k)^k - 1$

***La relación entre i y j_k, se podría estudiar, con un desarrollo en serie de Taylor,. y este estudio nos proporcionaría el siguiente resultado :**

$$j_k < i \;\leftrightarrow\; (i / j_k) > 1$$

****A la fracción, (i / j_k), se le denomina, factor de fraccionamiento, fundamental en la modelización de las rentas "mixtas".**

"CAPITALIZACION COMPUESTA PARA PERIODOS DE MADURACION, SUPERIORES A 1 AÑO"

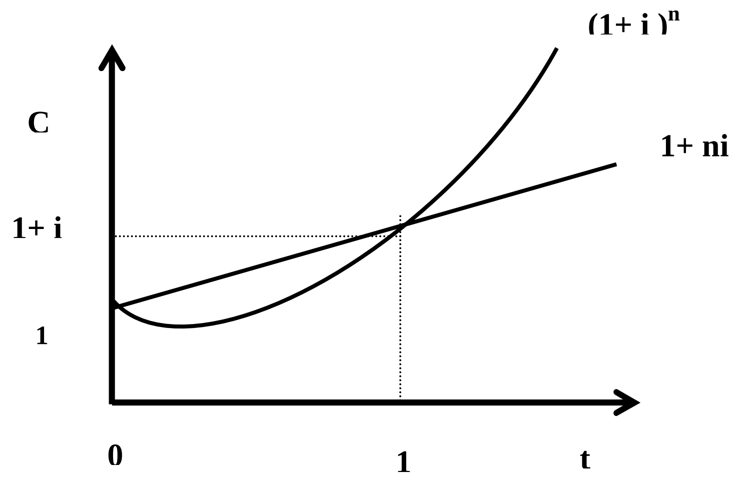
Aunque, no es frecuente, también se puede acordar a tiempo m, donde m es un múltiplo entero de un año: bienios, trienios, cuatrienios, quinquenios, décadas, etc.

- **La anotación utilizada es i^m, para m = 2,3,4,5…**
- **La equivalencia de i^m con i, siendo m = 2,3,4,5…**

$$(1 + i)^m = 1 + i^m$$

"COMPARACION ENTRE CAPITALIZACION SIMPLE Y COMPUESTA"

*Estudio Gráfico :



Conclusiones sobre el estudio gráfico :

■ **Para periodos < 1 año ═►**

═► Cap. simple > Cap compuesta

■ **Para 1 año, son indiferentes.**

■ **Para periodos > 1 año ═►**

═►Cap. compuesta > Cap. simple.

"CAPITALIZACION CONTINUA Y TANTO INSTANTANEO DE CAPITALIZACION."

CONCEPTO: **La capitalización continua, es en realidad un paso al límite de la capitalización compuesta fraccionada, es decir, en el caso de que el fraccionamiento k, tienda a infinito, los intereses, se acumulan al capital anterior, de forma prácticamente instantánea, para volver a producir intereses:**

- **Anotamos, la tasa de interés instantáneo, variable en el tiempo, por δ(t), la expresión de la capitalización continua:**

$$C_n = C_o \, e^{\int_o^n \delta(t)\, dt}$$

***Cuando δ(t) es constante, δ(t) = δ, la ley financiera de capitalización continua, se simplifica:**

$$C_n = C_o \quad e^{(\delta \cdot [n-0])} = C_o \quad e^{n \cdot \delta}$$

- **Equivalencia del tanto i y del tanto δ :**

$$(1+ i)^{n} = e^{n \cdot \delta} \quad (1)$$

despejando de (1), el tanto de interés anual efectivo i, equivalente a δ :

$$i = e^{\delta} - 1 \;\; , \text{como } e^{\delta} > 0 \implies i > \delta$$

- **Simétricamente, la equivalencia del tanto δ y del tanto efectivo i :**

$$(1+ i) = e^{\delta} \implies \delta = \log_e (1+ i)$$