Dpto. Economía Financiera y Contabilidad
"Análisis de las operaciones financieras de constitución y amortización"
TEMAS 8 (Rentas variables en prog. geométrica)
Prof. María Jesús Hernández García.

"RENTAS DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA"

■ INTRODUCCION:

Vamos a estudiar rentas de términos variables, primero en progresión geométrica, luego en aritmética, tanto, anuales y fraccionadas, pero siempre coincidiendo "el salto ó variación" con los intervalos o periodos de la renta.

"VALORACION RENTA INMEDIATA, ANUAL y POSPAGABLE DE n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q "

Horizonte Económico:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & & a_1 & a_1q & a_1q^2 & \ldots & a_1q^{j-1} & \ldots & a_1q^{n-2} & a_1q^{n-1} \\ \text{T.A.E } i & |\text{------}|\text{------}|\text{------}|\text{------}|\text{----}//\text{----}|\text{-----}//\text{------}|\text{------}| \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & j & \ldots & n-1 & n \end{array}$$

■ Observaciones sobre la razón q:

1ª.- Para las rentas temporales ó finitas, $q \in R^+-\{0,1\}$, si q fuese negativo, no sería un flujo de capitales financieros, si q = 0, todos los términos nulos, si q =1, renta de términos constante

2ª.- Si q > 1, la renta será de términos crecientes.

3ª.- Si 0 < q < 1, la renta será de términos decrecientes.

■ **Valor inicial: Se anota : $A(a_1, q)_{n\rceil i}$, se obtiene, por el proceso habitual, primero, actualizando los términos de la renta al 0 y una vez actualizados, se suman financieramente :**

1º).-Actualización y suma financiera de los términos:

$$A(a_1,q)_{n\rceil i}=a_1 (1+i)^{-1}+a_1q(1+i)^{-2} +\ldots+ a_1q^{j-1}(1+i)^{-j}+\ldots+a_1q^{n-1} (1+i)^{-n} =$$

$$=a_1(1+i)^{-1}[1+q(1+i)^{-1} +q^2 (1+i)^{-2}+\ldots+ q^{j-1} (1+i)^{-j+1} +q^{n-1} (1+i)^{-n+1}] \quad (1)$$

2º).-Suma de la progresión geométrica del corchete, tiene n términos, el primero, $c_1 = 1$ y la razón es, $q' = q\,(1+i)^{-1}$:

$$S_{pg} = c_1\,[(1-(q\,(1+i)^{-1})^{n} / (1-(q\,(1+i)^{-1})\,] =$$

$$= [1-(q^{n}\,(1+i)^{-n})/1-(q\,(1+i)^{-1})]$$

3º).-Sustituyendo este último valor en (1), queda, la expresión del valor inicial :

$$A(a_1, q)_{n\rceil i} = a_1\,\frac{[1-(q/(1+i))^{n}]}{(1+i)-q}$$

4º).-En el caso de que q= (1+i), sustituimos en (1) :

$$A(a_1, q)_{n\rceil i} = a_1\,(1+i)^{-1}[\,1 + q(1+i)^{-1} \ldots + q^{j-1}\,(1+i)^{-(j-1)} + \ldots +$$

$$q^{n-1}\,(1+i)^{-(n-1)}\,] = a_1(1+i)^{-1}[1 + (1+i)(1+i)^{-1} + (1+i)^{2}(1+i)^{-2} +$$

$$+ \ldots + (1+i)^{j-1}\,(1+i)^{-(j-1)} + \ldots + (1+i)^{n-1}\,(1+i)^{-(n-1)} = a_1\,n\,(1+i)^{-1}$$

- **<u>Expresión del valor inicial</u>: $A(a_1, q)_{n\rceil i} = a_1\,n\,(1+i)^{-1}$**

- **<u>El valor final</u> de esta renta, se anota, $S(a_1,q)_{n\rceil i}$ y, se obtiene capitalizando el valor inicial, $A(a_1, q)_{n\rceil i}$, desde 0, hasta n.**

<u>Gráfico :</u>

$$A(a_1, q)_{n\rceil i} \xrightarrow{(1+i)^{n}} S(a_1,q)_{n\rceil i}$$

|----|----|------//----|----//---------|

0 1 2 … j …. n

1º).- Capitalización el valor inicial $A(a_1,q)_{n\rceil i}$ desde 0 hasta n :

$$S(a_1,q)_{n\rceil i} = [A(a_1,q)_{n\rceil i}](1+i)^n =$$

$$= a_1 \frac{[1-(q/(1+i))^n]}{(1+i)-q}(1+i)^n = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i)-q}$$

2º).-<u>Expresion valor final</u> :

$$S(a_1,q)_{n\rceil i} = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i)-q}$$

"VALOR INICIAL RENTA INMEDIATA, TERMINOS VARIABLES EN PROGRESIONGEOMETRICA, RAZON q, VITALICIA O PERPETUA, ANUAL y POSPAGABLE "

<u>Horizonte económico</u> :

$$\begin{array}{lccccccc} & & a_1 & a_1q & a_1q^2 & \dots & a_1q^{j-1} & \\ \text{T.A.E } i & |------ & |------ & |------ & |------/\!/------ & & |----------------> & \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & j & \infty \end{array}$$

■ **<u>El valor inicial</u>, es el paso al límite, cuando $n \to \infty$ de**

$A(a_1,q)_{n\rceil i}$ es decir, $$A(a_1,q)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} A(a_1,q)_{n\rceil i}$$

1º).- Tomando límites :

$$A(a_1, q)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{[1-(q/(1+i))^n]}{(1+i)-q}$$

2ª).-El límite anterior, solo existe en el caso q < (1+i) , (en los otros casos, q ≥ (1+i), la serie diverge y el valor actual, es infinito).

3º).-Expresión valor inicial, en el caso que exista límite:

$$A(a_1, q)_{\infty\rceil i} = a_1 [1/ (1+i) - q)]$$

"VALORACION RENTA INMEDIATA, ANUAL Y PREPAGABLE de n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q"

Horizonte económico:

	a_1	$a_1 q$	a_1q^2	.....		a_1q^{n-2}	a_1q^{n-1}	
T.A.E i	|------	|------	|------//------		|------	|------	|------	|
	0	1	2	….		n-2	n-1	n

- **El valor inicial: Se obtiene con el mismo procedimiento utilizado para convertir las prepagables en pospagables en las rentas constantes:**

1º).-Expresión valor inicial: $\ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i}= (1+i)A(a_1, q)_{n\rceil i}$

2º).-En el caso de que q = (1+i), hay que trabajar con la expresión:

$$\ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i} = (1+i)\, a_1\, n\, (1+i)^{-1} = a_1\, n$$

- **Valor final**: Lo anotamos $\ddot{S}(a,q)_{n\rceil i}$ y, se obtiene, capitalizando el valor inicial, $\ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i}$, desde 0, hasta n:

Gráfico :

$$\ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i} \xrightarrow{(1+i)^n} \ddot{S}(a_1,q)_{n\rceil i}$$

|----|----|----//----|----//----|----|
0 1 2 … j … n-1 n

- **Expresión valor final** :

$$\ddot{S}(a_1,q)_{n\rceil i} = [\ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i}](1+i)^n = (1+i)\, S(a_1,q)_{n\rceil i}$$

"VALOR INICIAL RENTA INMEDIATA, ANUAL Y PREPAGABLE, VITALICIA O PERPETUA TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA RAZON q "

Horizonte Económico:

a_1 $a_1 q$ $a_1 q^2$ … $a_1 q^j$

T.A.E i |------|------|------|-----//------|---------------->
0 1 2 3 … j ∞

1º).- **Valor inicial** : $\ddot{A}(a_1, q)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i}$

2º).-Este límite solo existe en el caso $q < (1+i)$, (en los otros casos, la serie diverge y el valor actual, es infinito).

3º).- Expresión valor inicial :

$$\ddot{A}(a_1, q)_{\infty\rceil i} = (1+i)\, a_1 [1/ (1+i) - q)] = (1+i)\, A (a_1, q)_{\infty\rceil i}$$

"VALORACION RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, ANUAL, POSPAGABLE DE n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA RAZON q"

<u>Horizonte económico</u>:

```
                         a1    a1 q   ....   a1q^(j-1)  ....  a1q^(n-1)
T.A.E i   |----|-----|---->|----|------|------//-------|-----//------|
          0    1    ....   h   h+1   h+2   ....      h+j    ....   h+n
```

- **<u>El valor inicial</u>: Se obtiene con el mismo procedimiento seguido con las rentas constantes, siendo:**

$$h/ A(a_1, q)_{n\rceil i} = (1+i)^{-h} A(a_1, q)_{n\rceil i}$$

- **<u>El valor final</u>: Se anota el valor final: $h/S (a_1,q)_{n\rceil i}$, se obtiene capitalizando el valor inicial, $h/A(a_1, q)_{n\rceil i}$, desde 0, hasta n+h:**

$$h/ S (a_1,q)_{n\rceil i} = [\, h/A(a_1,q)_{n\rceil i} \,]\, (1+i)^{h+n} =$$

$$= (1+i)^{-h} (1+i)^{n+h} A(a_1,q)_{n\rceil i} = (1+i)^{n} A(a_1,q)_{n\rceil i} = S (a_1,q)_{n\rceil i}$$

"VALOR INICIAL LA RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q, VITALICIA O PERPETUA, ANUAL Y POSPAGABLE"

Horizonte económico :

```
                         a1    a1q   ....    a1q^(j-1)
T.A.E i    |----|----|------>|----|----|------//------|---------- >
           0    1    2  ....  h  h+1  h+2  ....     h+j          ∞
```

1º).- Cálculo y expresión valor inicial :

$$h/A(a_1,q)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} h/A(a_1,q)_{n\rceil i} = \lim_{n\to\infty} (1+i)^{-h} A(a_1,q)_{n\rceil i} =$$

$$= (1+i)^{-h} A(a_1,q)_{\infty\rceil i} = (1+i)^{-h} a_1 [1/(1+i)-q)]$$

2º).-Este límite solo existe, cuando $q < (1+i)$.

“VALORACION RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, ANUAL, PREPAGABLE DE n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q”

Horizonte económico:

```
                        a1    a1q  ...  a1q^j   ...   a1q^(n-1)
T.A.E i  |----|----|----->|-----|--//------|------//-----|------|
         0    1   ....    h    h+1  ...   h+j   ...   h+n-1  h+n
```

- **El valor inicial, se anota, $h / \ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i}$ y, se obtiene con los dos mismos procedimiento seguidos con las rentas constantes.**

- **Expresión valor inicial :**

$$h/ \ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i} = (1+i)^{-h} \ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i}$$

■ **Valor final: Lo obtenemos capitalizando el valor inicial, $h/\ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i}$, desde 0, hasta n+h, siendo**

$$h/\ddot{S}(a_1,q)_{n\rceil i} = [\,h/\ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i}\,]\,(1+i)^{h+n} =$$

$$= (1+i)^{-h}(1+i)^{n+h}\,\ddot{A}(a_1, q)_{n\rceil i} = (1+i)^{n}\,\ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i} = \ddot{S}(a_1,q)_{n\rceil i}$$

"VALOR INICIAL RENTA DIFERIDA h AÑOS, ANUAL y PREPAGABLE, VITALICIA O PERPETUA DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA RAZON q"

```
                    a1    a1q   a1q^2 ...    a1q^j
T.A.E i      |-----|----|----->|-----|----|----//------|------------ >
             0     1  ....      h    h+1  h+2 ....   h+j   ...   ∞
```

■ **Valor inicial, se anota, $h/\ddot{A}(a_1, q)_{\infty\rceil i}$ y, se obtiene :**

$$h/\ddot{A}(a_1, q)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} h/\ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i} = \lim_{n\to\infty} (1+i)^{-h}\,\ddot{A}(a_1,q)_{n\rceil i} =$$

$$= (1+i)^{-h}\,\ddot{A}(a_1,q)_{\infty\rceil I} = (1+i)^{-h}(1+i)\,a_1\,[1/(1+i)-q)] =$$

$$= (1+i)^{-h+1}\,a_1\,[1/(1+i)-q)] =$$

***Este límite solo existe, cuando $q < (1+i)$**