

“RENTAS DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA”

■ INTRODUCCION:

Vamos a estudiar rentas de términos variables, primero en progresión geométrica, luego en aritmética, tanto, anuales y fraccionadas, pero siempre coincidiendo “el salto ó variación” con los intervalos o periodos de la renta.

“VALORACION RENTA INMEDIATA, ANUAL y POSPAGABLE DE n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q ”

Horizonte Económico:

	a_1	a_1q	a_1q^2	...	a_1q^{j-1}	...	a_1q^{n-2}	a_1q^{n-1}
T.A.E i		-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	0	1	2	3	...	j	...	n-1 n

■ Observaciones sobre la razón q:

- 1ª.- Para las rentas temporales ó finitas, $q \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$, si q fuese negativo, no sería un flujo de capitales financieros, si $q = 0$, todos los términos nulos, si $q = 1$, renta de términos constante
- 2ª.- Si $q > 1$, la renta será de términos crecientes.
- 3ª.- Si $0 < q < 1$, la renta será de términos decrecientes.

- ### ■ Valor inicial: Se anota : $A(a_1, q)_{n|i}$, se obtiene, por el proceso habitual, primero, actualizando los términos de la renta al 0 y una vez actualizados, se suman financieramente :

1º).-Actualización y suma financiera de los términos:

$$\begin{aligned}
 A(a_1, q)_{n|i} &= a_1 (1+i)^{-1} + a_1 q (1+i)^{-2} + \dots + a_1 q^{j-1} (1+i)^{-j} + \dots + a_1 q^{n-1} (1+i)^{-n} = \\
 &= a_1 (1+i)^{-1} [1 + q(1+i)^{-1} + q^2 (1+i)^{-2} + \dots + q^{j-1} (1+i)^{-j+1} + q^{n-1} (1+i)^{-n+1}] \\
 &\quad (1)
 \end{aligned}$$

2º).-Suma de la progresión geométrica del corchete, tiene n términos, el primero, $c_1=1$ y la razón es, $q' = q(1+i)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 S_{pg} &= c_1 [(1-(q(1+i)^{-1})^n)/(1-(q(1+i)^{-1}))] = \\
 &= [1-(q^n(1+i)^{-n})/(1-(q(1+i)^{-1}))]
 \end{aligned}$$

3º).-Sustituyendo este último valor en (1), queda, la expresión del valor inicial :

$$A(a_1, q)_{n|i} = a_1 \frac{[1-(q/(1+i))^n]}{(1+i) - q}$$

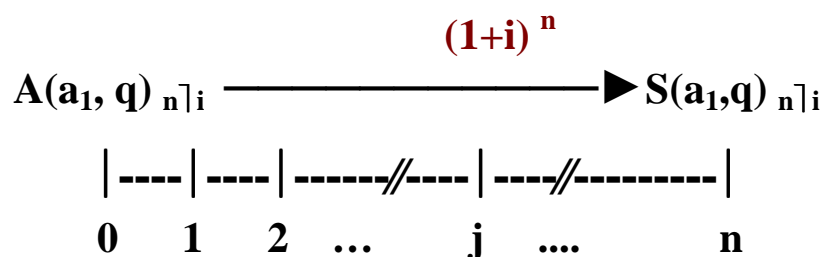
4º).-En el caso de que $q=(1+i)$, sustituimos en (1) :

$$\begin{aligned}
 A(a_1, q)_{n|i} &= a_1 (1+i)^{-1} [1 + q(1+i)^{-1} \dots + q^{j-1} (1+i)^{-(j-1)} + \dots + \\
 & q^{n-1} (1+i)^{-(n-1)}] = a_1 (1+i)^{-1} [1 + (1+i)(1+i)^{-1} + (1+i)^2(1+i)^{-2} + \\
 & + \dots + (1+i)^{j-1} (1+i)^{-(j-1)} + \dots + (1+i)^{n-1} (1+i)^{-(n-1)}] = a_1 n (1+i)^{-1}
 \end{aligned}$$

■ **Expresión del valor inicial:** $A(a_1, q)_{n|i} = a_1 n (1+i)^{-1}$

■ **El valor final** de esta renta, se anota, $S(a_1, q)_{n|i}$ y, se obtiene capitalizando el valor inicial, $A(a_1, q)_{n|i}$, desde 0, hasta n .

Gráfico :



1º).- Capitalización el valor inicial $A(a_1, q)_{n|i}$ desde 0 hasta n :

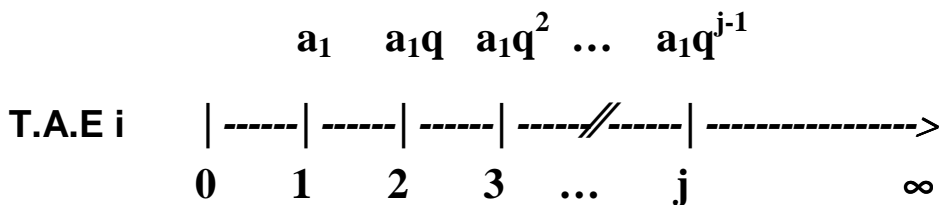
$$\begin{aligned}
 S(a_1, q)_{n|i} &= [A(a_1, q)_{n|i}](1+i)^n = \\
 &= a_1 \frac{[1-(q/(1+i))^n]}{(1+i)-q} (1+i)^n = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}
 \end{aligned}$$

2º).- Expresión valor final :

$$S(a_1, q)_{n|i} = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$$

“VALOR INICIAL RENTA INMEDIATA, TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q , VITALICIA O PERPETUA, ANUAL y POSPAGABLE ”

Horizonte económico :



■ **El valor inicial**, es el paso al límite, cuando $n \rightarrow \infty$ de

$A(a_1, q)_{n|i}$ es decir, $A(a_1, q)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} A(a_1, q)_{n|i}$

1º).- Tomando límites :

$$A(a_1, q)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{[1 - (q/(1+i))^n]}{(1+i) - q}$$

2ª).-El límite anterior, solo existe en el caso $q < (1+i)$, (en los otros casos, $q \geq (1+i)$, la serie diverge y el valor actual, es infinito).

3º).-Expresión valor inicial, en el caso que exista límite:

$$A(a_1, q)_{\infty|i} = a_1 [1/ (1+i) - q]$$

“VALORACION RENTA INMEDIATA, ANUAL Y PREPAGABLE de n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q”

Horizonte económico:

	a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^{n-2}$	$a_1 q^{n-1}$
T.A.E i						
	-----	-----	-----	//-----	-----	-----
	0	1	2	n-2	n-1 n

■ **El valor inicial:** Se obtiene con el mismo procedimiento utilizado para convertir las prepagables en pospagables en las rentas constantes:

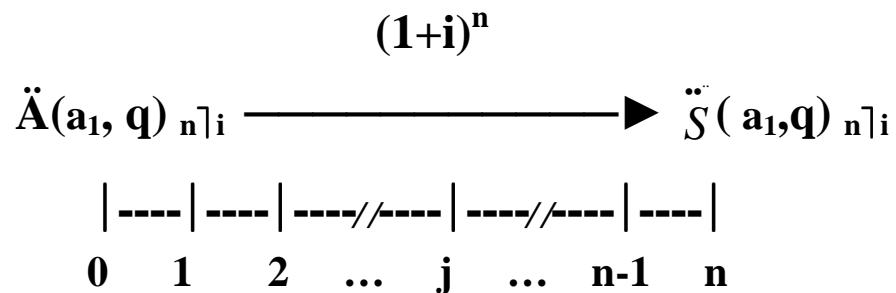
1º).-Expresión valor inicial: $\ddot{A}(a_1, q)_{n|i} = (1+i)A(a_1, q)_{n|i}$

2º).-En el caso de que $q = (1+i)$, hay que trabajar con la expresión:

$$\ddot{A}(a_1, q)_{n|i} = (1+i) a_1 n (1+i)^{-1} = a_1 n$$

- **Valor final:** Lo anotamos $\ddot{S}(a, q)_{n|i}$ y, se obtiene, capitalizando el valor inicial, $\ddot{A}(a_1, q)_{n|i}$, desde 0, hasta n:

Gráfico :

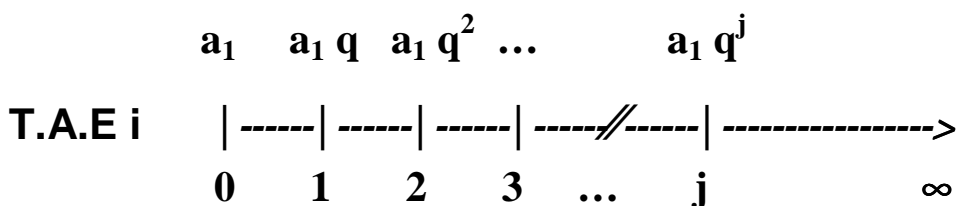


- **Expresión valor final :**

$$\ddot{S}(a_1, q)_{n|i} = [\ddot{A}(a_1, q)_{n|i}] (1+i)^n = (1+i) S(a_1, q)_{n|i}$$

“VALOR INICIAL RENTA INMEDIATA, ANUAL Y PREPAGABLE, VITALICIA O PERPETUA TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA RAZON q “

Horizonte Económico:



1º).- **Valor inicial :** $\ddot{A}(a_1, q)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{A}(a_1, q)_{n|i}$

2º).-Este límite solo existe en el caso $q < (1+i)$, (en los otros casos, la serie diverge y el valor actual, es infinito).

3º).- Expresión valor inicial :

$$\ddot{A}(a_1, q)_{\infty|i} = (1+i) a_1 [1/ (1+i) - q] = (1+i) A(a_1, q)_{\infty|i}$$

“VALORACION RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, ANUAL, POSPAGABLE DE n TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA RAZON q”

Horizonte económico:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & a_1 & a_1 q & \dots & a_1 q^{j-1} & \dots & a_1 q^{n-1} \\ \text{T.A.E } i & | & \text{---} & | & \text{---} & | & \text{---} & > & | & \text{---} & | & \text{---} & // & \text{---} & | & \text{---} & // & \text{---} & | \\ & 0 & 1 & \dots & h & h+1 & h+2 & \dots & h+j & \dots & h+n \end{array}$$

- **El valor inicial:** Se obtiene con el mismo procedimiento seguido con las rentas constantes, siendo:

$$h/ A(a_1, q)_{n|i} = (1+i)^{-h} A(a_1, q)_{n|i}$$

- **El valor final:** Se anota el valor final: $h/S(a_1, q)_{n|i}$, se obtiene capitalizando el valor inicial, $h/A(a_1, q)_{n|i}$, desde 0, hasta $n+h$:

$$\begin{aligned} h/ S(a_1, q)_{n|i} &= [h/A(a_1, q)_{n|i}] (1+i)^{h+n} = \\ &= (1+i)^{-h} (1+i)^{n+h} A(a_1, q)_{n|i} = (1+i)^n A(a_1, q)_{n|i} = S(a_1, q)_{n|i} \end{aligned}$$

“VALOR INICIAL LA RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES, TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q, VITALICIA O PERPETUA, ANUAL Y POSPAGABLE”

Horizonte económico :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_1q} & \dots & \mathbf{a_1q^{j-1}} \\ \mathbf{T.A.E\ i} & | & \text{---} & | & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} > & | & \text{---} & | & \text{---} & // & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} > \\ & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \dots & \mathbf{h} & \mathbf{h+1} & \mathbf{h+2} & \dots & & & & & & \mathbf{h+j} & & & \mathbf{\infty} \end{array}$$

1º).- Cálculo y expresión valor inicial :

$$\mathbf{h}/\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\mathbf{q}) \rightarrow_{i=\infty} \mathbf{h}/\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\mathbf{q}) \rightarrow_{i=\infty} (1+i)^{-h} \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\mathbf{q}) \rightarrow_{i=\infty}$$

$$= (1+i)^{-h} A(a_{1,q})_{\infty} = (1+i)^{-h} a_1 [1/(1+i)-q]$$

2º).-Este límite solo existe, cuando $q < (1+i)$.

**“VALORACION RENTA DIFERIDA h PERIODOS ANUALES,
ANUAL, PREPAGABLE DE n TERMINOS VARIABLES EN
PROGRESION GEOMETRICA, RAZON q”**

Horizonte económico:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_1q} & \dots & \mathbf{a_1q^j} & \dots & \mathbf{a_1q^{n-1}} \\ \text{T.A.E i} & | \text{---}| & | \text{---}| & | \text{---}>| & | \text{---}| & | \text{---}\diagdown\text{---}| & | \text{---}\diagdown\text{---}| & | \text{---}| \\ & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{h} & \mathbf{h+1} & \dots & \mathbf{h+j} & \dots & \mathbf{h+n-1} & \mathbf{h+n} \end{array}$$

- **El valor inicial**, se anota, $h / \ddot{A}(a_1, q)_{n|i}$ y, se obtiene con los dos mismos procedimientos seguidos con las rentas constantes.

■ **Expresión valor inicial :**

$$\mathbf{h}/\ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{q})_{n \uparrow i} = (1+i)^{-h} \ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{q})_{n \uparrow i}$$

- **Valor final:** Lo obtenemos capitalizando el valor inicial, $h/\ddot{A}(a_1, q)_{n|i}$, desde 0, hasta $n+h$, siendo

$$\begin{aligned} h/\ddot{S}(a_1, q)_{n|i} &= [h/\ddot{A}(a_1, q)_{n|i}] (1+i)^{h+n} = \\ &= (1+i)^{-h} (1+i)^{n+h} \ddot{A}(a_1, q)_{n|i} = (1+i)^n \ddot{A}(a_1, q)_{n|i} = \ddot{S}(a_1, q)_{n|i} \end{aligned}$$

“VALOR INICIAL RENTA DIFERIDA h AÑOS, ANUAL y PREPAGABLE, VITALICIA O PERPETUA DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA RAZON q”

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & a_1 & a_1q & a_1q^2 & \dots & a_1q^j & & \\ \text{T.A.E } i & & | & \text{-----} & | & \text{----} & | & \text{-----} & > & | & \text{-----} & | & \text{----} & | & \text{-----} & \text{//} & \text{-----} & | & \text{-----} & > \\ & & 0 & & 1 & & \dots & & h & & h+1 & & h+2 & & \dots & & h+j & & \dots & \infty \end{array}$$

- **Valor inicial,** se anota, $h/\ddot{A}(a_1, q)_{\infty|i}$ y, se obtiene :

$$h/\ddot{A}(a_1, q)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} h/\ddot{A}(a_1, q)_{n|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^{-h} \ddot{A}(a_1, q)_{n|i} =$$

$$\begin{aligned} &= (1+i)^{-h} \ddot{A}(a_1, q)_{\infty|i} = (1+i)^{-h} (1+i) a_1 [1/(1+i)-q)] = \\ &= (1+i)^{-h+1} a_1 [1/(1+i)-q)] = \end{aligned}$$

***Este límite solo existe, cuando $q < (1+i)$**