

“RENTAS DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA”

■ Introducción :

Vamos a estudiar ahora, las rentas de términos variables en progresión aritmética, anuales ó fraccionadas, con “salto” correspondiente al periodo de maduración ó intervalo entre los términos de la renta.

“VALORACION, RENTA INMEDIATA, n TERMINOS ANUALES, VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA RAZON d, ANUAL y POSPAGABLE”

Horizonte económico:

		a_1	a_1+d	a_1+2d	...	$a_1+(n-1)d$
T.A.E i		-----	-----	-----	-----	-----
	0	1	2	3	...	n-1 n

■ Observaciones sobre la razón d :

1ª) d puede ser positiva, renta de términos creciente ó d puede ser negativa, renta de términos decreciente, en este último caso, d tiene una cota inferior determinada por el carácter “positivo” de los términos de la renta, como flujo de capitales financieros

2ª) Cota inferior de d :

$$a_1 + (n-1) \cdot d > 0 \Rightarrow [(n-1) \cdot d] > -a_1 \Rightarrow d > -(a_1 / (n-1))$$

■ Valor inicial , se anota, $A(a_1, d)_{n|i}$ y, en este caso, su lo podemos plantear de dos maneras :

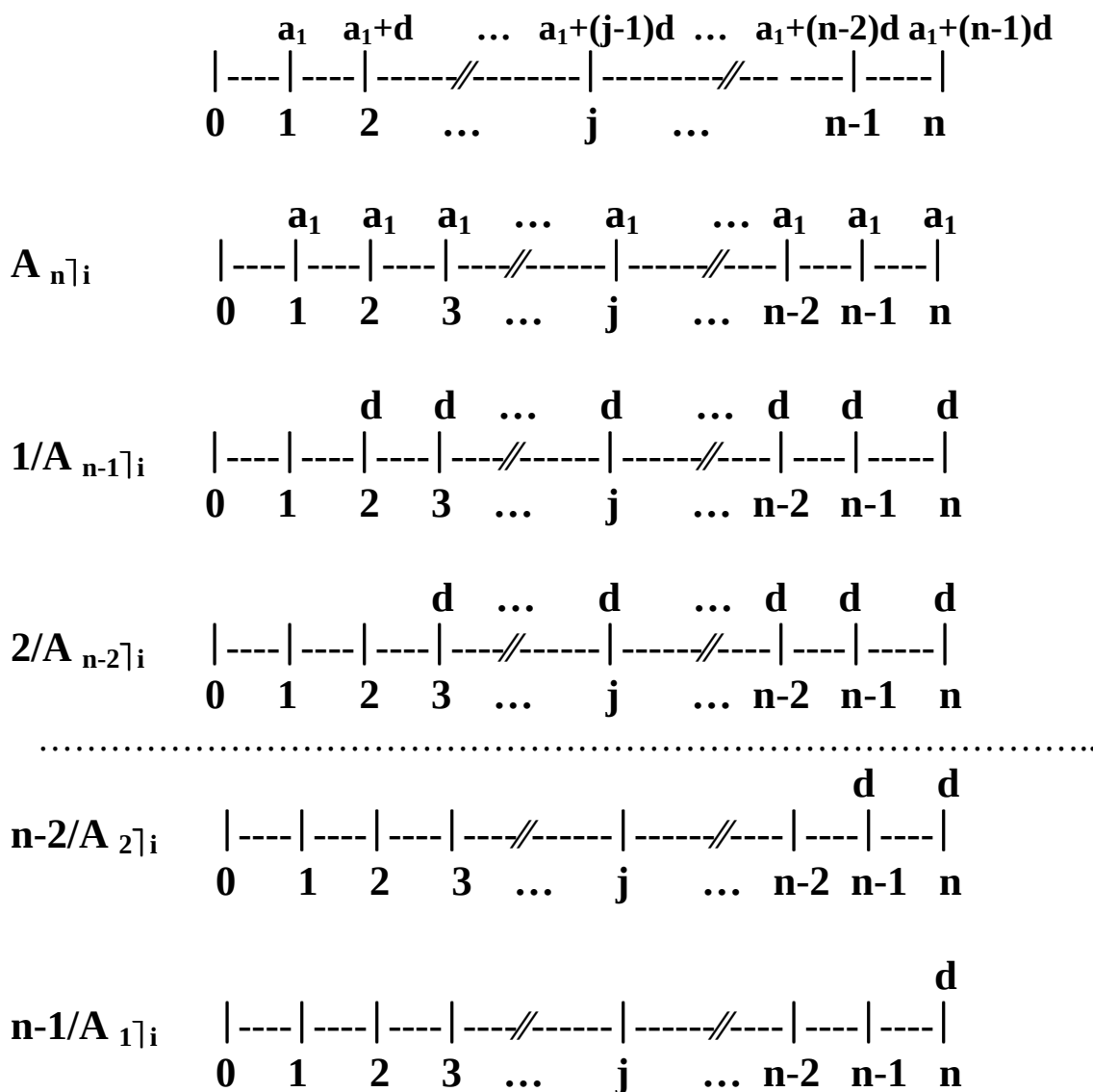
1ª).-Siguiendo el proceso habitual, actualizando todos los términos de la renta al 0 y, posteriormente efectuando su suma financiera:

$$A(a_1, d)_{n|i} = a_1 (1+i)^{-1} + (a_1+d) (1+i)^{-2} + \dots + (a_1 + (j-1) d) (1+i)^{-j} + \dots + (a_1 + (n-1) d) (1+i)^{-n}$$

2ª).- Descomponiendo la renta en suma de n rentas constante con las siguientes características :

- i) Una primera renta, inmediata, constante temporal y pospagable de n términos anuales de cuantía a_1
- ii) $n-1$ rentas de términos de cuantía constante d , de duración n , número de términos $n-1, n-2, \dots, 1$ y, respectivamente diferidas en $1, 2, \dots, (n-1)$, periodos anuales, (siempre se cumple que el número de términos de la renta más el diferimiento correspondiente es n)

Gráfica de la descomposición



■ **Expresión del valor inicial:**

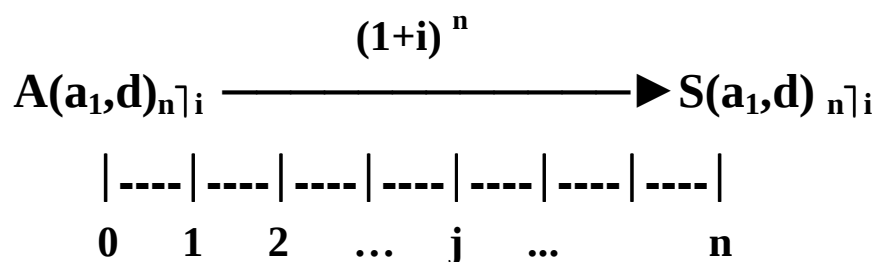
$$A(a_1, d)_{n|i} = (a_1 - a_{n|i}) + (1/d - a_{n-1|i}) + (2/d - a_{n-2|i}) + \dots + (n-2/d - a_{2|i}) + \dots + (n-1/d - a_{1|i}) = \\ = [(a_1 + (d/i) - a_{n|i})] - [(d.n/i) (1+i)^{-n}]$$

Si en la expresión anterior, se suma y se resta $(d.n/i)$ y luego se saca factor común $d.n$:

$$A(a_1, d)_{n|i} = (a_1 + (d/i) + d.n) a_{n|i} - (d.n/i)$$

■ **Valor final** de esta renta, se anota, $S(a_1, d)_{n|i}$ y, se obtiene, capitalizando el valor inicial, $A(a_1, d)_{n|i}$, desde 0, hasta n .

Gráfica :

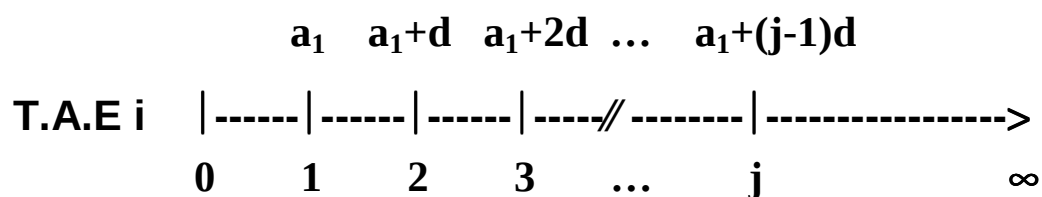


■ Capitalizando el valor inicial, $A(a_1, d)_{n|i}$, desde 0, hasta n :

$$S(a_1, d)_{n|i} = [A(a_1, d)_{n|i}] (1+i)^n = \\ = [(a_1 + d/i + d.n) a_{n|i} - (d.n/i)] (1+i)^n = \\ = [(a_1 + d/i + d.n) s_{n|i} - (d.n/i) (1+i)^n]$$

“VALOR INICIAL, RENTA INMEDIATA, VITALICIA ó PERPETUA, TERMINOS ANUALES, VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA RAZON d, ANUAL y POSPAGABLE”

Horizonte económico :



■ Expresión del valor inicial

$$A(a_1, d)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} A(a_1, d)_{n|i} = [a_1 + (d/i)] 1/i$$

“VALORACION, RENTA INMEDIATA, n TERMINOS ANUALES, VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA RAZON d, ANUAL y PREPAGABLE”

Horizonte económico:

	a_1	a_1+d	a_1+2d	...	$a_1+(n-1)d$
T.A.E i	-----	-----	-----	-----	-----
	0	1	2	3 ...	n-1 n

■ Valor inicial, se anota, $\ddot{A}(a_1, d)_{n|i}$ y, se obtiene :

$$\ddot{A}(a_1, d)_{n|i} = (1+i) \ddot{A}(a_1, d)_{n|i} = (1+i) \left[\frac{a_1 + (d/i)}{i} - \frac{(d.n/i)(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$\text{ó}$$

$$\ddot{A}(a, d)_{n|i} = (1+i) \left[(a + (d/i) + d.n) a_{n|i} - (d.n / i) \right]$$

■ Valor final, se anota, $\ddot{S}(a_1, d)_{n|i}$ y, su expresión :

$$\ddot{S}(a_1, d)_{n|i} = (1+i)^n \ddot{A}(a_1, d)_{n|i} = (1+i)^n S(a_1, d)_{n|i}$$

“VALORACION, RENTA INMEDIATA, VITALICIA o PERPETUA, TERMINOS ANUALES, VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA RAZON d, ANUALES y PREPAGABLE”

Horizonte económico:

	a_1	a_1+d	a_1+2d		$a_1+ j d$
T.A.E i	-----	-----	-----		-----
	0	1	2	 j	∞

■ Expresión valor inicial :

$$\begin{aligned} \ddot{A}(a_1, d)_{\infty|i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{A}(a_1, d)_{n|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+i) [(a_1 + (d/i)) a_{n|i}] - [(d.n/i) (1+i)^{-n}] = \\ &= (a_1 + (d/i)) \ddot{a}_{\infty|i} = (a_1 + (d/i)) (1 + (1/i)). \end{aligned}$$

“VALORACION, RENTA DIFERIDA h AÑOS, n TERMINOS ANUALES, VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA RAZON d, ANUAL y POSPAGABLE”

Horizonte económico:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & a_1 & & a_1+d & \dots & a_1+(j-1)d & \dots & a_1+(n-1)d & & & \\ \text{T.A.E } i & | & \text{----} & | & \text{-----} & > & | & \text{----} & | & \text{-----} & | & \text{-----} // \text{-----} & | & \text{-----} // \text{-----} & | \\ & 0 & 1 & \dots & h & & h+1 & h+2 & \dots & h+j & \dots & h+n \end{array}$$

■ Valor inicial , se anota $h/A(a_1, d)_{n|i}$ y, se obtiene:

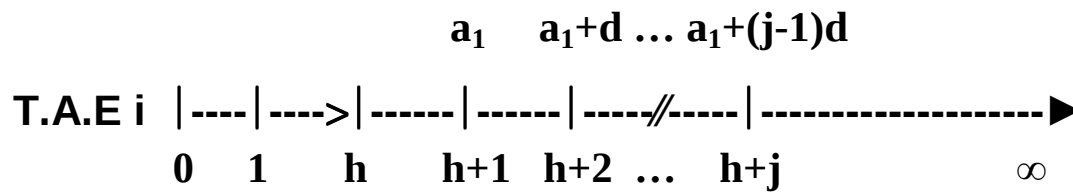
$$h/A(a_1, d)_{n|i} = (1+i)^{-h} A(a_1, d)_{n|i} = (1+i)^{-h} [(a_1 + (d/i)) a_{n|i}] - [(d.n/i)(1+i)^{-n}].$$

■ Valor final , se anota $h/S(a_1, d)_{n|i}$ y, se obtiene , por el proceso habitual de capitalización de 0 a n :

$$\begin{aligned} h/S(a_1, d)_{n|i} &= [h/A(a_1, d)_{n|i}] (1+i)^{h+n} = \\ &= (1+i)^{-h} [(a_1 + (d/i)) a_{n|i} - (d.n/i) (1+i)^{-n}] (1+i)^{h+n} = \\ &= [(a_1 + (d/i)) a_{n|i} - (d.n/i) (1+i)^{-n}] (1+i)^n = \\ &= (a_1 + (d/i)) s_{n|i} - d.n/i = S(a_1, d)_{n|i} \end{aligned}$$

“VALORACION, RENTA DIFERIDA h AÑOS, VITALICIA ó PERPETUA, TERMINOS ANUALES, VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA, RAZON d, ANUAL y POSPAGABLE”

Horizonte económico :



■ **Valor inicial** , se anota $h/A(a_1, d)_{\infty i}$ y, se obtiene:

$$\begin{aligned} h / A(a_1, d)_{\infty|i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} h / A(a_1, d)_{n|i} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^{-h} [(a_1 + (d/i)) a_{n|i}] - [(d \cdot n/i) (1+i)^{-n}] = \\ &= (1+i)^{-h} (a_1 + (d/i)) a_{\infty|i} \end{aligned}$$