

TEMA 7. “EMPRESTITOS DE OBLIGACIONES”

0.-INTRODUCCION :

0.1.-Definición:

“Son operaciones de amortización en las que el capital prestado, se divide en un número muy elevado de operaciones de préstamo que se van reembolsando de acuerdo con un plan general y unitario de amortización y en el que todas las operaciones tienen *a priori* condiciones financieras equivalentes”.

0.2.-Nomenclatura y anotaciones :

- i) Obligaciones, bonos y cédulas : Las partes alícuotas en las que se divide la operación de préstamo se materializan en títulos valores que pueden ser negociables, genericamente suelen calificarse a todos ellos como *OBLIGACIONES*.
- ii) Los obligacionistas ó acreedores : Son los prestamistas múltiples de la operación y con la posesión de las obligaciones, se le reconocen todos sus derechos.
- iii) El emisor ó deudor del empréstito de obligaciones, es el prestatario único de la operación.
- iv) Valor nominal de la obligación, es la cuantía de la prestación de cada una de las obligaciones en que se divide el empréstito y se anota con C.
- v) El número total de títulos emitidos ó número de partes en que se ha subdivido la operación global, se anota con N_1 .
- vi) La prestación global ó total nominal del empréstito, la anotamos C_0^T , donde, $C_0^T = N_1 \cdot C$.

0.3.-DIFERENCIACION ENTRE PRESTAMO y EMPRESTITO :

Los empréstitos, aunque sean operaciones de amortización, existe la posibilidad, de que las obligaciones sean préstamos individualizados con características diferentes, duración, método de amortización, etc.,

diferentes tanto del empréstito en su conjunto, como entre ellas mismas.

Lo dicho anteriormente, plantea, la necesidad completar el estudio de la operación con el análisis de las obligaciones de forma separada, desde el punto de vista del obligacionista individual.

1.- CLASIFICACION DE LOS EMPRESTITOS:

A) Por la modalidad del préstamo que representa la obligación :

a.1.- *Obligaciones americanas* , en las que el obligacionista recibe *periódicamente* los intereses (cupones), durante toda la vida de la obligación y la amortización del título se produce al vencimiento.

a.2.- *Obligaciones simples* , con una característica común, una entrega única, en el momento de la compra, y una entrega, también única en el momento del reembolso, (son operaciones financieras simples) y siendo la diferencia entre ellas, la ley financiera de valoración y el momento de abono de los intereses:

a.2.1.- *Obligaciones al descuento* , se utiliza para valorar la operación una ley de descuento, el título se adquiere por un valor efectivo, E , ó descontado, inferior al nominal C , donde $C - E$, representa la cuantía del descuento en el origen.

a.2.2.- *Obligaciones con intereses anticipados*, la operación se valora con una ley de capitalización con intereses anticipados ó prepagables, igual que en a.2.1. se adquieren por una cuantía C^* , inferior a C y $C - C^*$, representa la cuantía de los intereses anticipados en el momento inicial.

a.2.3.- *Obligaciones con intereses acumulados ó CUPON CERO* , la operación se valora en capitalización compuesta, el título se adquiere por el nominal y en el momento del reembolso se recibe este y los intereses acumulados hasta la fecha.

a.3.- *Obligaciones con amortización progresiva ó amortizables por reducción del nominal*, en las que los obligacionistas reciben

periódicamente durante la vida de las obligación, no solo los intereses correspondientes, sino también los reembolsos parciales.

B) Por la forma de reembolso de los títulos :

b.1.- *Reembolso simultáneo*, todos los títulos, tienen la misma duración y se amortizan en la misma fecha, prefijada en el momento de la emisión.

b.2.- *Reembolso no simultáneo ó títulos amortizables por sorteo*, todos los títulos no tienen la misma duración, sino que se amortizan escalonadamente.

El emisor, mediante un procedimiento aleatorio, determina los títulos concretos que se amortizan en cada momento.

C) Por la existencia de garantías:

c.1.- *Obligaciones con garantías simples*, aquellas que solo cuentan con la garantía de la solvencia del emisor.

c.2.- *Obligaciones garantizadas*, en las que la deuda se afecta a alguna garantía específica, la más frecuentes, las de carácter hipotecario.

D) Por la modalidad del préstamo que constituye la operación globalmente considerada:

Desde el punto de vista el emisor ó del conjunto de los obligacionistas, el empréstito puede ser de diversas modalidades, respondiendo al método de amortización elegido para la operación : americano, francés, de cuotas constantes, etc.

E) Por la existencia de características comerciales :

e.1.- *Empréstitos puros*, las obligaciones son emitidas por el nominal, las entregas realizadas por los obligacionistas son recibidas íntegramente por el emisor y los pagos realizados por este, se destinan exclusivamente al abono de los intereses y amortización del nominal.

e.2.- *Empréstitos comerciales*, cuando no se cumplen la condición anterior y existen pagos adicionales en concepto de gastos, primas, etc.

F) Por la posibilidad del cálculo del coste y/o rendimiento de la operación:

f.1.- *Empréstitos predeterminados*, en los que el coste y/o rendimiento, se pueden calcular *a priori* .

f.2.- *Empréstitos posdeterminados*, en los que el coste y/o rendimiento, solo pueden conocerse *a posteriori*.

2.-ESTUDIO FINANCIERO DE LOS EMPRESTITOS PUROS:

2.1.-INTRODUCCION

La valoración de estos empréstitos se realizará en capitalización compuesta, con intereses pospagables y el criterio de análisis utilizado para realizar el estudio financiero, es el que se basa en la modalidad de reembolso de las obligaciones ó títulos, donde lo fundamental es distinguir entre empréstitos donde todos los títulos tienen la misma duración y empréstitos con títulos de distinta duración.

2.2.-EMPRESTITOS CON TITULOS DE IGUAL DURACION:

Es la modalidad más sencilla de empréstitos y actualmente, prácticamente, la única utilizada en el mercado español.

Como todos los títulos se amortizan en el mismo momento, prefijado en las condiciones de la emisión, se trata en realidad de N_1 , préstamos de idénticas condiciones financieras: cuantía, duración, dinámica de amortización, ley de valoración etc.

Para resolver este tipo de empréstitos basta con obtener los valores correspondientes a uno de los préstamos y multiplicarlos por el número de ellos, N_1 .

a) Análisis financiero de una obligación : Cada obligación representa una operación de amortización de prestación (C, t_0) y la contraprestación, el conjunto de términos amortizativos $\{ (a_1', t_1) ; (a_2', t_2) ; \dots ; (a_n', t_n) \}$, siendo t_0 el momento de la emisión del empréstito, t_n , el de su cancelación total y la ecuación de equivalencia:

$$C = \sum_{h=1}^n a'_h \prod_{j=1}^h (1 + i_j)^{-1}$$

b) **Modalidades de obligaciones** : Los N_1 préstamos agregados representativos de las obligaciones, todos idénticos y valorados con la misma ley financiera, pueden ser de cualquier tipo :

i) **PRESTAMOS AMERICANOS, (*obligaciones americanas*) :**

■ Los términos amortizativos del título-obligación, anotados a'_h , donde, $h = 1, 2, \dots, n$, toman los valores:

■

$$a'_1 = C \cdot i_1; \quad a'_2 = C \cdot i_2; \quad \dots \quad a'_{n-1} = C \cdot i_{n-1}; \quad a'_n = C \cdot i_n + C$$

■ Los términos amortizativos del empréstito de obligaciones, anotados a_h , donde, $h = 1, 2, \dots, n$, toman los valores:

■

$$a_1 = N_1 \cdot a'_1 = N_1 \cdot C \cdot i_1; \quad a_2 = N_1 \cdot a'_2 = N_1 \cdot C \cdot i_2; \quad \dots;$$

$$a_{n-1} = N_1 \cdot a'_{n-1} = N_1 \cdot C \cdot i_{n-1} \quad \text{y} \quad a_n = N_1 \cdot a'_n = N_1 \cdot C \cdot i_n + N_1 \cdot C$$

ii) **PRESTAMOS SIMPLES, (*obligaciones con intereses acumulados ó cupón cero*):**

■ Los términos amortizativos del título-obligación, (anotados a'_h , donde, $h = 1, 2, \dots, n$), toman los valores:

$$a'_1 = 0; \quad a'_2 = 0; \quad \dots; \quad a'_{n-1} = 0 \quad \text{y} \quad a'_n = C \cdot \prod_{h=1}^n (1 + i_h)$$

■ Los términos amortizativos del empréstito de obligaciones, anotados a_h , donde, $h = 1, 2, \dots, n$, toman los valores:

$$a_1 = N_1 \cdot a'_1 = 0; \quad a_2 = N_1 \cdot a'_2 = 0; \quad \dots; \quad a_{n-1} = N_1 \cdot a'_{n-1} = 0$$

$$\text{y} \quad a_n = N_1 \cdot a'_n = N_1 \cdot C \cdot \prod_{h=1}^n (1 + i_h)$$

iii) **AMORTIZACION PROGRESIVA, (*obligaciones amortizables por reducción del nominal*) :**

■ Los términos amortizativos del título-obligación, anotados a'_h , donde, $h = 1, 2, \dots, n$, toman los valores:

$$a'_1 = C i_1 + A'_1; \quad a'_2 = C i_2 + A'_2; \dots; a'_n = C_{n-1} i_n + A'_n,$$

con A'_h , cuota de amortización de una obligación en t_h
 y C_{h-1} capital vivo en t_{h-1} por la derecha.

- Los términos amortizativos del empréstito de obligaciones, anotados a_h , donde, $h = 1, 2, \dots, n$, toman los valores:**

$$a_1 = N_1 \cdot a'_1 = N_1 \cdot (C i_1 + A'_1); \quad a_2 = N_1 \cdot a'_2 = N_1 \cdot (C i_2 + A'_2); \dots;$$

$$a_{n-1} = N_1 \cdot a'_{n-1} = N_1 \cdot (C_{n-2} i_{n-1} + A'_{n-1}) \quad \text{y} \quad a_n = N_1 \cdot a'_n = N_1 \cdot (C_{n-1} i_n + A'_n).$$

c) Análisis financiero del empréstito: El empréstito, resultado de agregar las N_1 operaciones de idénticas características, es una operación de prestación :

$\{(N_1 \cdot C, t_0)\}$ y contraprestación :

$\{(a_1, t_1), (a_2, t_2), \dots, (a_n, t_n)\}$, siendo, $a_h = N_1 \cdot a'_h$, $h=1, 2, \dots, n$.

2.3.-RELACIONES BASICAS PARA EL EMPRESTITO :

- Ecuación de equivalencia financiera del total del empréstito en el origen:**

$$C_0^T = N_1 \cdot C = \sum_{h=1}^n a_h \cdot \prod_{j=1}^h (1+i_j)^{-1}$$

- Capital vivo total del empréstito de forma prospectiva en t_j :**

$$C_j^T = N_1 \cdot C_j = a_{j+1} \cdot (1+i_j)^{-1} + a_{j+2} \cdot (1+i_j)^{-1} \cdot (1+i_{j+2})^{-1} + \dots +$$

$$+ a_n \cdot (1+i_j)^{-1} \cdot (1+i_{j+2})^{-1} \cdot \dots \cdot (1+i_n)^{-1}$$

- Ecuación dinámica de amortización del empréstito en $[t_{j-1}, t_j]$:**

$$C_j^T = N_1 \cdot C_j = N_1 \cdot ((C_{j-1} (1+i_j) - a'_j) = C_{j-1}^T (1+i_j) - a_j$$

- Descomposición del término amortizativo del empréstito que devenga en t_j :

$$a_j = (C_{j-1}^T - C_j^T) + C_{j-1}^T \cdot i_j = A_j^T + I_j^T$$

3.- EMPRESTITOS CON TITULOS DE DISTINTA DURACION :

Este tipo de empréstitos es mucho más complejo que el anterior puesto que da lugar a operaciones financieras diferentes para el emisor y para los obligacionista considerados individualmente, además de resultar más complicada y costosa la administración de la emisión.

3.1-Análisis financiero de una obligación. La particularidad el estudio financiero de una obligación individualizada, proviene del hecho en que en un mismo empréstito, existen títulos con *distinta duración*, determinándose *por sorteo*, las obligaciones que corresponde cancelar en cada momento, para que todos los obligacionistas, estén en las mismas condiciones frente al emisor.

Cada obligación representa *a priori* una obligación de préstamo de prestación, $\{(C, t_0)\}$ y contraprestación, $\{(a'_1, t_1), (a'_2, t_2), \dots, (a'_n, t_n)\}$, siendo t_n , el final del empréstito.

- Equivalencia financiera en el origen, para una obligación :

$$C = \sum_{h=1}^N a'_h \prod_{j=1}^H (1+i_j)^{-1}$$

Los títulos que resultan reembolsados en cada sorteo lo han de ser por el valor de su reserva matemática ó capital vivo, C_k en ese momento, t_k , es decir si resultan amortizados en t_k , anterior a t_n , final de la operación global, se sigue verificando la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, para todas y cada una de las obligaciones que constituyen el empréstito, es decir :

$$\begin{aligned}
 C_k &= a'_{k+1} \cdot (1+i_k)^{-1} + a'_{k+2} \cdot (1+i_k)^{-1} \cdot (1+i_{k+1})^{-1} + \dots + \\
 &+ a'_n \cdot (1+i_k)^{-1} \cdot (1+i_{k+1})^{-1} \cdot \dots \cdot (1+i_n)^{-1}
 \end{aligned}$$

- Una obligación que resulte amortizada en el momento t_k , responde a la siguiente estructura:

Prestación: $\{(C, t_0)\}$

Contraprestación : $\{(a'_1, t_1), (a'_2, t_2), \dots, (a'_k, t_k), (C_k, t_k)\}$.

Donde la equivalencia financiera para esta obligación, en el origen :

$$C = \sum_{h=1}^k a'_h \prod_{j=1}^h (1+i_j)^{-1} + C_k \prod_{j=1}^k (1+i_j)^{-1} = \sum_{h=1}^n a'_h \prod_{j=1}^h (1+i_j)^{-1}$$

- Esquema de la amortización de una obligación que resulte amortizada en el momento t_k del sorteo:

<i>Primer Sorteo:</i>	$\begin{array}{c} C \quad a'_1 + C_1 \\ \text{-----} \\ t_0 \quad t_1 \end{array}$
<i>Segundo Sorteo:</i>	$\begin{array}{c} C \quad a'_1 \quad a'_2 + C_2 \\ \text{-----} \text{-----} \\ t_0 \quad t_1 \quad t_2 \end{array}$
.....
<i>Sorteo j—esimo:</i>	$\begin{array}{c} C \quad a'_1 \quad a'_2 \quad \dots \quad a'_j + C_j \\ \text{-----} \text{-----} \text{-----} \\ t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_j \end{array}$
<i>Ultimo Sorteo:</i>	$\begin{array}{c} C \quad a'_1 \quad a'_2 \quad \dots \quad a'_{n-1} \quad a'_n + C_n \\ \text{-----} \text{-----} \text{-----} \text{-----} \\ t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1} \quad t_n \end{array}$

3.2.-Modalidades de obligaciones :

- i) *Obligaciones americanas*, las obligaciones reciben periódicamente los intereses devengados, por lo que, el valor de reembolso coincide con el nominal sea cuál sea el momento en que se amortice la obligación.

Términos Amortizati vos :

Primer Sorteo : $a'_1 = C \cdot i_1 + C_1$, donde, $C_1 = C$.

Segundo Sorteo : $a'_1 = C \cdot i_1$; $a'_2 = C \cdot i_2 + C_2$, donde, $C_2 = C$.

Asi sucesivame nte, las que resulten amortizada s, último sorteo :

$a'_1 = C \cdot i_1$; $a'_2 = C \cdot i_2$;..... : $a'_{n-1} = C \cdot i_{n-1}$ y $a'_n = C \cdot i_n + C$

ii) Obligaciones simples :los obligacionistas, solo reciben un único término amortizativo, con la devolución del principal y los intereses acumulados hasta la fecha:

Términos Amortizativos:

Primer Sorteo : $a'_1 = O + C_1$, donde, $C_1 = C \cdot (1 + i_1)$.

Segundo Sorteo : $a'_1 = O$ y $a'_2 = O + C_2$, donde, $C_2 = .C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$

Asi sucesivamente, las que resulten amortizadas, último sorteo :

$a'_1 = O$; $a'_2 = O$;..... : $a'_{n-1} = O$ y $a'_n = C \cdot \prod_{h=1}^N (1 + i_h)$

iii) Obligaciones amortizables por reducción del nominal, aquí, cuando una obligación sea amortizada por sorteo, el obligacionista recibirá además del pago correspon-diente al periodo, el capital vivo de la misma en ese momento

Términos Amortizativos:

Primer Sorteo: $a'_1 = C \cdot i_1 + A'_1$ mas C_1 , donde, $C_1 = \sum_{h=2}^N a'_h \prod_{j=1}^h (1 + i_j)^{-1}$

Segundo Sorteo : $a'_1 = C \cdot i_1 + A'_1$ y $a'_2 = C_1 \cdot i_2 + A'_2$ mas C_2 , donde, $C_2 = .\sum_{h=3}^N a'_h \prod_{j=1}^h (1 + i_j)^{-1}$

Asi sucesivamente, las que resulten amortizadas, último sorteo :

$a'_1 = C \cdot i_1 + A'_1$; $a'_2 = C_1 \cdot i_2 + A'_2$;.....;

$a'_{n-1} = C_{n-2} \cdot i_{n-1} + A'_{n-1}$ mas C_{n-1} , donde, $C_{n-1} = a'_n \cdot (1 + i_n)^{-1}$

y $a'_n = C_{n-1} \cdot i_n + A'_n$ mas C_n , donde, $C_n = O$

3.3.- Análisis financiero del empréstito.

Ahora para el estudio conjunto del empréstito, hay que introducir dos nuevas variables, para definir el proceso de amortización de los títulos, anotaremos por: i) M_1, M_2, \dots, M_n , los títulos que se amortizan respectivamente en cada momento, t_1, t_2, \dots, t_n .

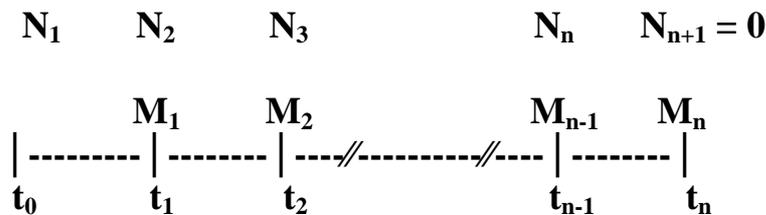
ii) N_1, N_2, \dots, N_n , el número de obligaciones VIVAS ó en circulación que van quedando en $t_0, t_1, t_2 \dots, t_n$, por la derecha es decir después de devengarse $a_h, h=1,2,\dots,n$, termino amortizativo del empréstito correspondiente a $t_h, h=1,2,\dots,n$.

iii) Resultando inmediatas la relación siguiente :

a) $N_1 = \sum_{h=1}^N M_h$ siendo $M_h = N_h - N_{h+1}$, y, $N_{h+1} = N_h - M_h$, para, $h = 1,2,\dots,n$, además, como, $M_h \geq 0$, el número de títulos vivos, será, constante ó decreciente.

b) $N_h = \sum_{j=h}^N M_j$; $N_h = N_1 - \sum_{h=1}^h M_h$ y $N_{n+1} = 0$.

3.4.-Estudio de la operación considerada globalmente:



M₁ Obligaciones	$C \cdot M_1 \quad (a'_1 + C_1) \cdot M_1$
M₂ Obligaciones	$C \cdot M_2 \quad a'_1 \cdot M_2 \quad (a'_2 + C_2) \cdot M_2$
.....
M_r Obligaciones	$C \cdot M_r \quad a'_1 \cdot M_r \quad a'_2 \cdot M_r \quad \dots (a'_r + C_r) \cdot M_r$
.....
M_n Obligaciones	$C \cdot M_n \quad a'_1 \cdot M_n \quad a'_2 \cdot M_n \quad \dots a'_{n-1} \cdot M_n \quad (a'_n + C_n) \cdot M_n$

Siendo por lo tanto, la operación del empréstito global:

N₁ Obligaciones	$ \begin{array}{ccccccc} C \cdot N_1 & & a_1 & & a_2 & & a_{n-1} & & a_n \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{---//---//---} & & \text{-----} & \\ t_0 & & t_1 & & t_2 & & t_{n-1} & & t_n \end{array} $
-----------------------------------	--

Resultado de la agregación mediante suma vertical en cada fin de periodo de las operaciones presentadas por todas las obligaciones emitidas :

Pr estación en t_0 :

$$C \cdot M_1 + C \cdot M_2 + \dots + C \cdot M_n = C \cdot \sum_{h=1}^n M_h = C \cdot N_1.$$

Contraprestación en cada periodo :

$$t_1 : a_1 = (a'_1 + C_1) \cdot M_1 + a'_1 \cdot M_2 + \dots + a'_1 \cdot M_n = a'_1 \cdot N_1 + C_1 \cdot M_1$$

$$t_2 : a_2 = (a'_2 + C_2) \cdot M_2 + a'_2 \cdot M_3 + \dots + a'_2 \cdot M_n = a'_2 \cdot N_2 + C_2 \cdot M_2$$

.....

.....

$$t_h : a_h = (a'_h + C_h) \cdot M_h + a'_h \cdot M_{h+1} + \dots + a'_h \cdot M_n = a'_h \cdot N_h + C_h \cdot M_h$$

.....

$$t_n : a_n = (a'_n + C_n) \cdot M_n = a'_n \cdot N_n + C_n \cdot M_n \quad \text{con} \quad C_n = 0$$

4.- ESTRUCTRA DE LOS TERMINOS AMORTIZATIVOS DEL EMPRESTITO :

4.1- Los términos amortizativos totales del empréstito, a_h , $h=1,2,\dots,n$, tienen la siguiente estructura:

$$a_h = a'_h \cdot N_h + C_h \cdot M_h \text{ ,siendo, } a'_h = C_{h-1} \cdot i_h + A'_h .$$

Siendo :

1º) $a'_h \cdot N_h$: Se destina al pago del término amortizativo, a'_h , ($a'_h = C_{h-1} \cdot i_h + A'_h$, $h=1,2,\dots,n$) a los N_h títulos que, permanecen vivos, antes del sorteo correspondiente en t_h

2º) $C_h \cdot M_h$: tiene por objetivo, la amortización, por el valor de su reserva matemática, C_h , de los M_h títulos que resultan amortizados en el sorteo.

4.2.- En los empréstitos de obligaciones se verifican todas las relaciones correspondientes a cualquier operación de amortización :

■ Equivalencia financiera en el origen t_0 :

$$C_0^T = C \cdot N_1 = \sum_{h=1}^N a_h \cdot \prod_{j=1}^K (1+i_j)^{-1}$$

■ Reserva matemática, saldo financiero ó capital pendiente del empréstito en t_h , por la derecha, (forma prospectiva).

$$C_h^T = \sum_{s=h+1}^N a_s \cdot \prod_{j=h}^{s-1} (1+i_j)^{-1}$$

■ El número de títulos vivos al principio del periodo $[t_h, t_{h+1}]$ es N_{h+1} y sabiendo que, todos ellos tienen el mismo capital vivo:

$$C_h^T = C_h \cdot N_{h+1}$$

Despejando :

$$N_{h+1} = \frac{C_h^T}{C_h}$$

Al plantear la ecuación de la dinámica amortizativa total del empréstito :

$$C_h^T = C_{h-1}^T \cdot (1+i_h) - a_h.$$

Pudiéndose obtener :

$$a_h = C_{h-1}^T \cdot i_h + (C_{h-1}^T - C_h^T) = I_h^T + A_h^T.$$

Siendo :

- $C_{h-1}^T - C_h^T = A_h^T$: representa la disminución del capital vivo del empréstito durante el periodo $[t_{h-1}, t_h]$ ó cuota de amortización total del empréstito.
- $C_{h-1}^T \cdot i_h = I_h^T$: Cuota de interés del periodo.
- Siendo, $a_h = I_h^T + A_h^T$, para todo, $h=1,2,\dots, n$, término amortizativo del empréstito.